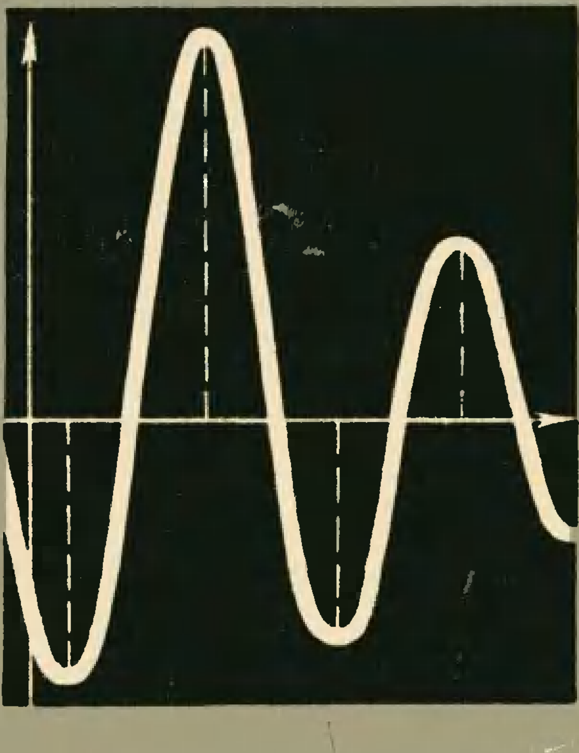
Ф. Ф. НАГИБИН

ЭКСТРЕМУМЫ



БИБЛИОТЕКА ШКОЛЬНИКА

Ф. Ф. НАГИБИН

ЭКСТРЕМУМЫ

Пособие
для учащихся
старших
классов

ИЗДАТЕЛЬСТВО „ПРОСВЕЩЕНИЕ“ • МОСКВА—1966

Книга принадлежит к серии «Библиотека школьника» Она посвящена изучению наиболее важных для практической деятельности человека задач — отысканию экстремальных (крайних) и наилучших (оптимальных) решений. Несмотря на разнообразие задач, выдвигаемых практикой, их объединяет одна особенность — поиск наиболее выгодного, производительного и экономного, наименее трудоемкого. Поиску наибольшего, наименьшего, наилучшего и посвящена эта книга.

Автор в доступной форме излагает методы нахождения экстремумов различных функций как результат решения практических задач алгебры, геометрии, геодезии, картографии и даже вариационного исчисления и линейного программирования.

Книга будет полезна учащимся старших классов, лицам, занимающимся самообразованием, а также учителям математики средней школы.

Рукопись рецензировали:
профессор *В Г. Болтянский*,
доцент *А Я. Маргулис*,
учитель *В В. Евгенов*.

6—6

ОТ АВТОРА

В этой книжке рассматриваются важные для практической деятельности человека задачи. Можно назвать их задачами на экстремумы-оптимумы (экстремум — крайнее, оптимум — наилучшее). Они очень разнообразны по своему содержанию, форме и приемам решения. Но, несмотря на это разнообразие, их объединяет одна особенность — *поиск наиболее выгодного в определенных отношениях, наиболее экономного, наимение трудоемкого, наиболее производительного. Этот поиск кратко можно назвать поиском наилучшего.*

Человека особенно интересует наилучшее. Он стремится к нему, добивается его, борется за него. В жизни, в трудовой деятельности ему постоянно приходится решать вопросы о том, как нужно поступать в каждом случае, чтобы получающиеся результаты его деятельности были наилучшими.

В поисках наилучшего помогает человеку наука. Особенно он обязан математике.

Задачи на экстремумы-оптимумы — это одно из наиболее могучих деревьев математического сада. Крепки корни этого дерева; они разветвляются и уходят глубоко в различные математические науки. Ствол этого дерева ветвист и высок. Крона его раскинулась широко и могуче. Особенно быстро растет и расцветает это дерево в наше время.

Нельзя пройти мимо этого дерева, не остановившись, не осмотрев его. Наша книжка — это тропинка, ведущая к этому дереву. Идти по ней не так просто и легко. Чтобы пройти ее, понадобятся силы и настойчивость. Но ведь все ценное только так и добывается.

Читатель, который любит математику, просмотрит нашу книжку и сам решит — читать ли ее ему. Читателю же, относящемуся к математике равнодушно, мы говорим: попробуй прочитай! Ведь ты ничего от этого не потеряешь. Приобретения же твои могут быть значительными.

Может быть, тебя пугают трудности? Но основное затруднение, с которым ты встретишься, — это овладение понятием производной и некоторыми применениями его. Для преодоления этого затруднения ты можешь обратиться к учебнику алгебры для старших классов или популярным книгам по высшей математике. Впрочем, самое необходимое о производной ты найдешь и в нашей книжке (стр. 30—35).

Конечно, каждую книгу по математике нужно не только читать, но нужно и работать с ней. Поэтому мы даем разнообразные задачи для самостоятельного решения. Мы высоко ценим такие задачи и считаем, что без них не могло быть и книжки.

Не бойся же трудностей, юный читатель! Постарайся по проложенной нами тропинке дойти до конца ее, и твои усилия будут вознаграждены. Перед тобой откроются новые широкие математические горизонты. И, как знать, может быть, ты захочешь остаться садовником чудесного сада математики, где растет прекрасное дерево экстремумов-оптимумов.

Мы советуем читателю не проходить мимо наших указаний на другие книги, развивающие рассматриваемые нами вопросы. Тему об экстремумах мы не могли изложить полно и строго, да мы и не стремились к этому. Больше всего мы заботились о доступности изложения, о возбуждении интереса. Поэтому мы говорим юному читателю: смотри на эту книжку как на введение в большую и важную тему об экстремумах. Пусть вслед за ней в твоих руках окажутся все более и более серьезные книги.

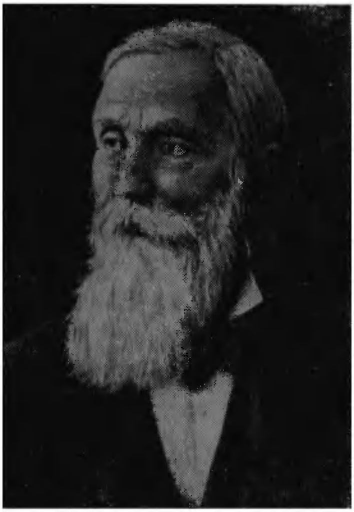
В работе над этой книжкой нам большую помощь оказали доктор физико-математических наук, профессор В. Г. Болтянский, доцент А. Я. Маргулис и учитель математики В. В. Евгенов. Сердечно благодарим их за эту помощь.

В коммунистическом обществе профессия математики станет одной из самых распространенных. Готовиться к этому надо уже сейчас.

Академик С. Л. Соболев

КАКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ОСОБЕННО ВАЖНЫ?

Представьте себе, что математику однажды задали вопрос: «Какие математические задачи особенно важны?» Что ответит математик? Наверное, он подумает, а потом скажет: «Очень много задач ставит жизнь перед математикой, и они настолько разнообразны, что вряд ли можно придумать что-либо более разнообразное. Есть среди задач, решением которых занимается математика, простые, есть и очень трудные. Некоторые задачи напоминают собой безделушки, другие настолько серьезны, что от решения их зависит человеческое благополучие. Есть задачи, оставляющие решающего их человека спокойным, а есть и такие, от которых дух захватывает. Одни задачи светят, как светлячки, а другие горят, как яркие звезды. Очень богат и разнообразен мир задач. Красота, богатство и разнообразие его все растут и растут. И нет конца этому росту. Развивающаяся жизнь выдвигает перед математикой все новые и новые задачи, и без решения многих из них невозможно наше движение вперед». Помолчав, математик продолжит: «Выделить из всех задач наиболее важные трудно. Нет таких весов, на которых можно было бы взвесить важность задач. Однако некоторые группы задач все же можно признать особенно важными для самой математики и ее приложений. К таким группам надо от-



П. Л. Чебышев

нести прежде всего задачи на наибольшие и наименьшие значения величин, или, как их обычно называют, задачи на нахождение экстремумов». (Если заглянуть в словарь иностранных слов, то из него мы узнаем, что экстремум означает к р а й н и й.)

К сказанному математиком мы можем добавить следующее. О таких задачах особенно хорошо писал великий русский математик Пафнутий Львович Чебышев. Он указывал, что «практическая деятельность человека представляет чрезвычайное разнообразие, и для удовлетворения всех ее требований, разумеется, недостает науке многих и различных метод. Но из них особенную важность имеют те, которые необходимы для решения различных видоизменений одной и той же задачи, общей для всей практической деятельности человека: *как располагать средствами своими для достижения по возможности большей выгоды?*».

К этой задаче, по мнению П. Л. Чебышева, приводит большая часть вопросов практики, и только решением ее можно удовлетворить требования практики, которая «везде ищет самого лучшего, самого выгодного». П. Л. Чебышев добавляет: «Решение задач этого рода составляет предмет так называемой *теории наибольших и наименьших величин.* Эти задачи, чисто практического характера, имеют особенную важность и для теории: все законы, определяющие движение материи весомой и невесомой, представляют решение задач этого рода. Нельзя не заметить особенно благотворного влияния их на развитие наук математических»[1].

---

[1] П. Л. Ч е б ы ш е в, Полное собрание сочинений, т. V, изд. АН СССР, 1951, стр. 150—151.

НЕСКОЛЬКО ПРОСТЫХ ЗАДАЧ НА ЭКСТРЕМУМЫ

Хорошо известно, что примеры часто бывают поучительнее многословных сбъяснений. Поэтому мы начнем с примеров задач на экстремумы.

1. Задача о прямоугольной площадке.

Заготовлен материал для изгороди длиной l м. Необходимо этой изгородью огородить прямоугольную площадку, имеющую наибольшую площадь. Какими должны быть размеры этой площадки?

2. Задача о желобе.

Из прямоугольного листа железа, ширина которого a мм, делают желоб прямоугольного сечения. С этой целью по краям листа отгибают полосы (рис. 1). *Какой ширины должны быть эти полосы, чтобы получился желсб с наибольшей пропускной способностью?*

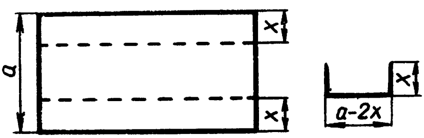


Рис. 1

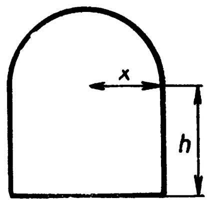


Рис. 2

3. Задача о тоннеле.

Сечение тоннеля представляет собой прямоугольник с примыкающим к нему полукругом (рис. 2). *Диаметр полукруга равен основанию прямоугольника. Периметр сечения тоннеля должен быть равен $2p$ м. Какими должны быть размеры сечения, чтобы пропускная способность тоннеля была наибольшей?*

4. Задача о балке наибольшей прочности.

Из бревна цилиндрической формы, диаметр которого $2R$, необходимо изготовить балку прямоугольного сечения, имеющую наибольшую прочность (рис. 3). *Какими должны быть размеры балки, если инженерные расчеты показы-*

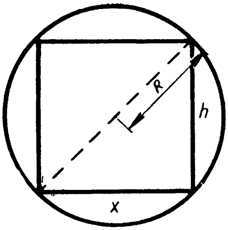


Рис. 3

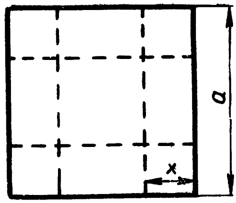


Рис. 4

вают, что прочность балки прямоугольного сечения пропорциональна ширине балки и квадрату высоты ее?

5. Задача об открытом сверху ящике.

Из квадратного листа железа со стороной a мм нужно сделать открытый сверху ящик. Для этого по углам листа вырезают равные квадраты (рис. 4) *и из получившейся крестовины сгибают ящик. Какие квадраты нужно вырезать по углам листа, чтобы получился ящик наибольшей вместимости?*

6. Задача о цистерне.

Какими должны быть размеры цилиндрической цистерны заданного объема V дм^3, чтобы расход листового железа на изготовление ее был наименьшим?

МОЖНО ЛИ ПОЛЬЗОВАТЬСЯ ГРАФИКАМИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ЭКСТРЕМУМЫ?

Как же решаются задачи на экстремумы? Чтобы разобраться в поставленном вопросе, нам придется заняться началами теории экстремумов.

Решение задачи на экстремумы, вообще говоря, сводится к разысканию экстремумов (наибольшего или наименьшего значения некоторой функции). Так, *задача о прямоугольной площадке* (№ 1) приводит к функции, выражающей площадь прямоугольника с периметром l.

Пусть ширина прямоугольника x *м*. Тогда длина его должна быть равна $\frac{l}{2}-x$, и, значит, площадь $S = \left(\frac{l}{2}-x\right)x$. Для решения задачи остается найти, при каком значении x функция $\left(\frac{l}{2}-x\right)x$ принимает наибольшее значение.

Если взять *задачу о желобе* (№ 2), то она приводит к функции, выражающей площадь поперечного сечения желоба $S=(a-2x)x$, или $S=-2x^2+ax$, где x — ширина каждой из отгибаемых по краям листа полос. Чтобы найти ответ на вопрос этой задачи, необходимо установить, при каком значении x получившаяся функция принимает наибольшее значение.

Рассмотрим еще *задачу об открытом сверху ящике* (№ 5). Длину стороны квадратов, вырезаемых по углам, обозначим через x (*мм*). Дном ящика служит квадрат со стороной $a-2x$. Поэтому объем ящика выражается функцией $V=(a-2x)^2x$. Нужно найти, при каком значении x эта функция принимает наибольшее значение.

Примеров достаточно. Они показывают, что для решения задач на экстремумы нужно научиться находить экстремумы функций.

Как же находить экстремумы функций?

Прежде всего возникает догадка — воспользоваться для нахождения экстремумов функции (одной переменной величины) ее графиком. Ведь по графику можно установить, при каких значениях аргумента функция принимает наибольшее и наименьшее значения (если она их принимает) и какие именно по величине. Это, конечно, так, но построение графика функции часто оказывается трудным делом. К тому же практически выполнимым часто бывает построение не всего графика, а лишь части его. Наконец, учтем, что графическим способом экстремумы функции могут быть найдены лишь приближенно. Поэтому целесообразны и необходимы поиски других способов разыскания экстремумов.

ЭКСТРЕМУМЫ КВАДРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Обратимся к частным случаям функций. Начнем с квадратной функции.

Рассмотрим *задачу о прямоугольной площадке* (№ 1). Решение ее, как было установлено выше, сводится к нахождению такого значения x, при котором функция $S=\left(\frac{l}{2}-x\right)x$ принимает наибольшее значение. Поступим так: преобразуем функцию, выделив из нее полный квадрат:

$$\left(\frac{l}{2}-x\right)x=-x^2+\frac{l}{2}x=-\left(x^2-\frac{l}{2}x\right)=$$
$$=-\left(x^2-2x\frac{l}{4}+\frac{l^2}{16}-\frac{l^2}{16}\right)=-\left[\left(x-\frac{l}{4}\right)^2-\frac{l^2}{16}\right]=$$
$$=\frac{l^2}{16}-\left(x-\frac{l}{4}\right)^2.$$

Получившаяся разность будет наибольшей при наименьшем значении вычитаемого, которое равно 0 при $x-\frac{l}{4}=0$. Следовательно, рассматриваемая функция принимает наибольшее значение при $x=\frac{l}{4}$. Итак, площадка с периметром l будет иметь наибольшую площадь, если ширина ее равна $\frac{l}{4}$ и длина $\frac{l}{4}$, то есть когда она будет квадратной [1].

Возьмем *задачу о желобе* (№ 2). Как было выяснено выше, она приводит к квадратной функции $S=-2x^2+ax$. Чтобы найти экстремум (наибольшее значение) этой функции, преобразуем ее, выделив полный квадрат:

$$-2x^2+ax=-2\left(x^2-x\frac{a}{2}\right)=-2\left(x^2-2x\frac{a}{4}+\right.$$
$$\left.+\frac{a^2}{16}-\frac{a^2}{16}\right)=-2\left[\left(x-\frac{a}{4}\right)^2-\frac{a^2}{16}\right]=\frac{a^2}{8}-2\left(x-\frac{a}{4}\right)^2.$$

В получившейся разности уменьшаемое $\frac{a^2}{8}$ постоянно, а вычитаемое $2\left(x-\frac{a}{4}\right)^2$ зависит от x. Как известно, при постоянном уменьшаемом разность будет наибольшей при наименьшем возможном значении вычитаемого. Но в нашем случае вычитаемое $2\left(x-\frac{a}{4}\right)^2$ неотрицательно и наименьшее возможное значение его равно 0 при $x-\frac{a}{4}=0$. Значит, рассматриваемая квадратная функция имеет наибольшее значение при $x=\frac{a}{4}$ и оно равно $\frac{a^2}{8}$.

---

[1] Отметим, что мы попутно доказали теорему: *Из всех прямоугольников с данным периметром наибольшую площадь имеет квадрат*

Прием, которым мы пользовались при решении этих задач, имеет своей основой выделение из квадратного трехчлена полного квадрата. Он применяется довольно часто, и им нужно уметь пользоваться. Мы применим его еще для решения общей задачи о разыскании экстремума квадратной функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Данную функцию преобразуем так:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Если $a > 0$, то первое слагаемое $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ получившейся суммы неотрицательно и будет иметь наименьшее значение при условии $x + \frac{b}{2a} = 0$, то есть при $x = -\frac{b}{2a}$. Второе же слагаемое $c - \frac{b^2}{4a}$ постоянно, поэтому квадратная функция $ax^2 + bx + c$ в этом случае при $x = -\frac{b}{2a}$ будет иметь наименьшее значение, равное $c - \frac{b^2}{4a}$.

Если же $a < 0$, то первое слагаемое $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ неположительно и будет иметь наибольшее значение при $x + \frac{b}{2a} = 0$, то есть при $x = -\frac{b}{2a}$. А так как второе слагаемое постоянно, то в этом случае квадратная функция будет иметь наибольшее значение, равное $c - \frac{b^2}{4a}$.

Мы доказали теорему:

Квадратная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает экстремальное значение при $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Это значение будет наибольшим (максимумом), если $a < 0$, и наименьшим (минимумом), если $a > 0$. И в том и другом случае экстремальное значение функции будет равно $c - \frac{b^2}{4a}$.

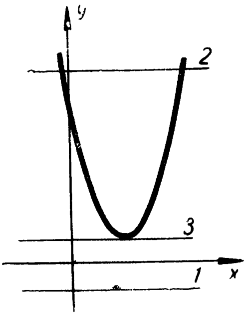


Рис 5

Хорошую теорему полезно доказать не одним а несколькими способами Поэтому докажем ту же самую теорему иначе. В основу нового доказательства положим «графические» соображения Как известно, графиком квадратной функции служит парабола Легко сообразить, что наименьшее или наибольшее значение квадратной функции соответствует вершине параболы (самой нижней или самой верхней точке ее) Дело сводится поэтому к разысканию координат вершины параболы. Чтобы найти координаты вершины параболы, будем рассматривать еще вспомогательную прямую $y = h$, параллельную оси x-ов и пересекающую ось y-ов в точке с ординатой h. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ и прямая $y = h$ могут: 1) совсем не иметь общих точек, 2) иметь две точки пересечения и 3) иметь только одну общую точку (точку касания (рис. 5) Точкой касания может быть лишь вершина параболы.

Чтобы найти координаты ее, нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c, \\ y = h \end{cases}$$

В первое уравнение вместо y подставим h и решим получившееся уравнение относительно x. Получим: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c-h)}}{2a}$.

Для точки касания (вершины параболы) должно быть $x_1 = x_2$, то есть $b^2 - 4a(c - h) = 0$, или $b^2 - 4ac + 4ah = 0$ При этом условии абсцисса вершины параболы будет равна $x_0 = -\frac{b}{2a}$, а ордината $y_0 = h = \frac{4ac - b^2}{4a} = c - \frac{b^2}{4a}$.

Значит, наибольшее или наименьшее значение квадратная функция будет иметь при $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Если $a < 0$, то это будет наибольшее значение, если же $a > 0$, то — наименьшее.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ЭКСТРЕМУМЫ КВАДРАТНОЙ ФУНКЦИИ

При решении задач на нахождение экстремумов квадратных функций можно каждый раз пользоваться приемом выделения полного квадрата, но можно пользоваться и только что доказанной теоремой. Для облегчения использования теоремы отметим, что если исследуемая на экстремум квадратная функция $y = ax^2 + bx + c$ имеет действительные корни, то точка экстремума x_0 равняется среднему арифметическому этих корней, а соответствующее экстремальное значение функции y_0 равно $ax_0^2 + bx_0 + c$ [1].

Выведем из теоремы об экстремуме квадратной функции полезное следствие. Вот оно:

Произведение двух положительных множителей, сумма которых постоянна, достигает наибольшего значения тогда, когда эти множители равны.

В самом деле, пусть S — сумма этих двух множителей, x — первый из них и, значит, $S - x$ — второй. Произведение рассматриваемых множителей $y = x(S - x)$ или $y = -x^2 + Sx$ имеет по теореме об экстремуме квадратной функции наибольшее значение при $x_0 = \frac{S}{2}$, равное $y_0 = \frac{S^2}{4}$.

Для закрепления усвоенного обратимся к примерам задач на нахождение экстремумов квадратных функций.

1. Решим *задачу о тоннеле.* Обозначим через x радиус полукруга, образующего верхнюю часть тоннеля, и через h — высоту прямоугольной нижней части его (рис. 2). Тогда $2p = 2x + 2h + \pi x$, откуда $h = p - x - \frac{1}{2}\pi x$. Площадь сечения тоннеля выразится так:

$$S = 2x\left(p - x - \frac{1}{2}\pi x\right) + \frac{1}{2}\pi x^2, \text{ или}$$

$$S = -\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)x^2 + 2px.$$

Получилась квадратная функция. Она при $x_0 = -\frac{2p}{-2\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2p}{4 + \pi}$ будет иметь наибольшее значение, равное $\frac{2p^2}{4 + \pi}$. Отметим, что при этом значении x_0 имеем $h = \frac{2p}{4 + \pi}$, то есть $h = x_0$.

2. Возьмем еще *задачу о секторе наибольшей площади. Требуется из круговых секторов данного периметра $2p$ найти такой, площадь которого была бы наибольшей.*

---

[1] Так можно поступать и в том случае, если квадратная функция имеет мнимые корни.

Пусть x — длина дуги сектора. По периметру и длине дуги сектора легко найти радиус; он равен $\frac{1}{2}$ $(2p-x)$. Площадь сектора выражается функцией $S=\frac{1}{4}(2p-x)x$, или $S=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}px$. По теореме об экстремумах квадратной функции найдем, что при $x_0=p$ получившаяся функция принимает наибольшее значение. Следовательно, из всех круговых секторов с данным периметром $2p$ наибольшую площадь, равную $\frac{1}{4}p^2$, имеет сектор, дуга которого равна полупериметру (а значит, и сумме двух радиусов).

Легко заметить, что для решения этой задачи можно было бы воспользоваться выведенным перед этим следствием. В самом деле, функция $\frac{1}{4}(2p-x)x$ имеет экстремум при том же значении, что и функция $(2p-x)x$, отличающаяся от нее лишь постоянным (положительным) множителем. А функция $(2p-x)x$ — произведение двух множителей, сумма которых $(2p-x)+x=2p$ постоянна. Следовательно, наибольшее значение функция $(2p-x)x$ и точно так же функция $\frac{1}{4}(2p-x)x$, принимает при условии $2p-x=x$, то есть при $x=p$.

МЕСТНЫЕ И ОБЩИЕ ЭКСТРЕМУМЫ

Чтобы более уверенно продвигаться вперед, внесем необходимые уточнения в понимание экстремумов. Обратимся с этой целью к графику некоторой функции (рис. 6). Рассматривая его, мы обнаруживаем, что в точках x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и x_6 данная функция принимает наибольшее или наименьшее значение по сравнению со значениями ее в достаточно близких соседних точках. Для таких экстремумов придумано хорошее название — локальные (местные)[1].

[1] Точные определения локальных экстремумов таковы: функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный максимум, если найдется такое положительное число δ, что для всех h, удовлетворяющих неравенству $|h|<\delta$, выполняется неравенство $f(x_0+h)\leqslant f(x_0)$. Иначе: x_0 — точка локального максимума функции $f(x)$, если найдется такой интервал (отрезок) оси x-ов, с центром в точке x_0, что для всех значений x из этого интервала выполняется неравенство $f(x)\leqslant f(x_0)$. Именно так и нужно понимать выражение — достаточно близкие соседние точки. Аналогично определяется локальный минимум. (См., например, А. Я. Хинчин, Краткий курс математического анализа 1955).

В нашем случае в точках x_1, x_3 и x_5 функция принимает локальные минимумы, а в точках x_2, x_4 и x_6 — локальные максимумы. При этом чертеж убеждает нас в том, что локальный минимум может быть больше локального максимума.

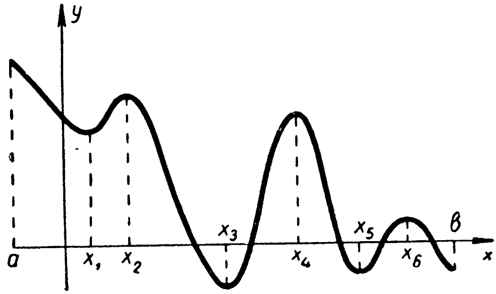


Рис. 6

Наибольшее и наименьшее значения функции для всех точек области определения ее (а не только для соседних) можно назвать абсолютными (общими). По нашему графику данная функция абсолютный максимум принимает в точке a (это так называемый краевой экстремум) и абсолютный минимум в точке x_3.

Рассмотренный пример подсказывает нам, как находить абсолютные экстремумы. Очевидно, нужно найти сначала все локальные экстремумы и рассмотреть еще значения функции в концах отрезка, на котором она определена. Абсолютный максимум функция может принимать в одном из концов этого отрезка, или же им будет один из локальных максимумов. Так же находится абсолютный минимум.

ОДНО ЗАМЕЧАТЕЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НЕГО

Многие задачи на экстремумы решаются с помощью одного замечательного неравенства. Это неравенство связывает арифметическое и геометрическое средние. Сформулируем и докажем его.

Теорема. ***Пусть $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ — неотрицательные числа и n — натуральное число. Тогда $\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1x_2x_3\ldots x_n}$. Здесь равенство имеет место в том и только в том случае, если $x_1=x_2=x_3=\ldots=x_n$.***

Огюстен Луи Коши

Это неравенство в солидных математических книгах признается исключительно красивым и чрезвычайно важным. Считается, что оно является одним из столпов теории неравенств.

Известны многочисленные интересные доказательства неравенства между арифметическим и геометрическим средними. Мы изложим одно из этих доказательств, предложенное известным французским математиком Огюстеном Коши (1789—1857). Основой этого доказательства служит индукция вверх и вниз.

Начнем с доказательства неравенства $y_1^2+y_2^2 \geqslant 2y_1y_2$, где y_1 и y_2 — любые действительные числа. Хорошо известно, что квадрат действительного числа неотрицателен. Значит $(y_1-y_2)^2 \geqslant 0$, откуда и следует, что $y_1^2+y_2^2 \geqslant 2y_1y_2$.

Если положить $y_1^2=x_1$, $y_2^2=x_2$, то из доказанного неравенства получим, что $\frac{x_1+x_2}{2} \geqslant \sqrt{x_1x_2}$. Равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда $x_1=x_2$.

Воспользуемся сейчас индукцией вверх. Возьмем 4 неотрицательных числа x_1, x_2, x_3, x_4 и запишем средние арифметические $\frac{x_1+x_2}{2}$ и $\frac{x_3+x_4}{2}$. Применив к ним предшествующее неравенство, получим:

$$\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2} \geqslant \sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{x_3+x_4}{2}} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{\sqrt{x_1x_2}\cdot\sqrt{x_3x_4}} = \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}.$$

Продолжая таким же образом (беря 8 чисел, затем 16 и т. д.), мы убедимся, что неравенство $\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1x_2x_3\ldots x_n}$ справедливо для $n=1, 2, 4, \ldots$, вообще для любого n, являющегося степенью 2. Это и есть индукция вверх.

Применим индукцию вниз. Докажем, что если рассматриваемое неравенство верно для числа n, то оно верно и для $n-1$. Имеем: $\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1x_2x_3\ldots x_n}\,(n \geqslant 2)$.

Заменим здесь x_n через $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1}$, а остальные числа оставим неизменными. Тогда

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{n-1}+\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{n-1}}{n-1}}{n} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_{n-1}\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1}}.$$

Упростив получившееся неравенство, получим

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1} \geqslant \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_{n-1}}\sqrt[n]{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1}},$$

откуда $\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1}\right)^n \geqslant x_1x_2\ldots x_{n-1}\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1}$

и $\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} \geqslant x_1x_2\ldots x_{n-1}$. Извлекая из обеих частей корень степени $n-1$, находим $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1} \geqslant$ $\geqslant \sqrt[n-1]{x_1x_2\ldots x_{n-1}}$. Значит, если доказываемое неравенство верно для $n\,(n \geqslant 2)$, то оно верно и для $n-1$.

Объединим оба вывода. Доказываемое неравенство верно для любого n, равного натуральной степени числа 2, как бы она ни была велика. Но по второй части наших рассуждений это неравенство должно быть верным и для всех натуральных чисел, предшествующих этой степени 2. Значит, доказываемое неравенство верно для любого натурального числа n. Легко доказать, что неравенство будет иметь место в том и только в том случае, если $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n$.

Из доказанной теоремы нетрудно вывести два очень важных для нас **следствия**.

1. Пусть сумма n неотрицательных слагаемых (переменных) $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ постоянна. Обозначим ее через S. Воспользовавшись неравенством между арифметическим и геометрическим средними, получаем: $\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \leqslant \frac{S}{n}$, откуда следует, что $x_1x_2\ldots x_n \leqslant \left(\frac{S}{n}\right)^n$. Здесь равенство

будет иметь место тогда и только тогда, когда все слагаемые x_k равны, то есть когда каждое из них равно $\frac{S}{n}$. В остальных случаях произведение $x_1x_2\ldots x_n$ будет меньше постоянного числа $\left(\frac{S}{n}\right)^n$. Следовательно, это число $\left(\frac{S}{n}\right)^n$ — наибольшее из значений произведения $x_1x_2\ldots x_n$ (при условии постоянства суммы их), и оно получается тогда и только тогда, когда каждый сомножитель равен $\frac{S}{n}$. Итак, произведение n неотрицательных сомножителей (сумма которых постоянна) принимает наибольшее значение, когда все эти сомножители равны.

2. Пусть произведение n неотрицательных множителей (переменных) $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ постоянно. Обозначим его через P. Тогда $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{P}$ и x_1+x_2+ $+\ldots+x_n \geqslant n\sqrt[n]{P}$. Равенство здесь может быть в том и только в том случае, если все сомножители x_k равны, то есть когда каждый из них равен $\sqrt[n]{P}$. Во всех остальных случаях $x_1+x_2+\ldots+x_n$ больше постоянного $n\sqrt[n]{P}$. Следовательно, $n\sqrt[n]{P}$ — наименьшее значение суммы x_1+x_2+ $+\ldots+x_n$, и оно получается, когда каждое слагаемое равно $\sqrt[n]{P}$. Итак, сумма неотрицательных слагаемых, произведение которых постоянно, принимает наименьшее значение, когда все слагаемые равны.

Чтобы показать, как «работают» только что выведенные нами следствия, обратимся к задачам.

1. Вспомним *задачу о цилиндрической цистерне* (стр. 8). Если R — радиус основания и H — высота цистерны, то площадь поверхности ее $S = 2\pi RH + 2\pi R^2$ и объем $V =$ $= \pi R^2 H$. Поэтому $H = \frac{V}{\pi R^2}$ и $S = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2$, или $S = \frac{V}{R} +$ $+ \frac{V}{R} + 2\pi R^2$. Площадь поверхности цилиндрической цистерны нам удалось представить в виде суммы трех слагаемых. Произведение этих слагаемых равно $\frac{V}{R}\cdot\frac{V}{R}\cdot 2\pi R^2 = 2\pi V^2$, то есть постоянно. Следовательно, сумма этих слагаемых принимает наименьшее значение при условии равенства их: $\frac{V}{R} = 2\pi R^2$, т. е. при $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Тогда высота цистерны

должна быть равна $\dfrac{V}{\pi\sqrt[3]{\dfrac{V^2}{4\pi^2}}} = 2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}} = 2R$. Итак, высота цистерны будет равна диаметру основания ее.

2. *Задача о том, как вырезать из круга прямоугольник наибольшей площади.*

Из жестяного круга, диаметр которого D, требуется вырезать прямоугольник наибольшей площади. Какими должны быть размеры этого прямоугольника?

Легко сообразить, что искомый прямоугольник должен быть вписанным в окружность, ограничивающую круг. Если x — основание его, то высота должна быть равна $\sqrt{D^2 - x^2}$, и тогда площадь будет $x\sqrt{D^2 - x^2}$. Требуется найти, при каком значении x функция $x\sqrt{D^2 - x^2}$ принимает наибольшее значение. Вместо этой функции мы можем рассматривать квадрат ее, то есть $x^2(D^2 - x^2)$, так как обе эти функции принимают наибольшее значение при одном и том же значении x. Функция же $x^2(D^2 - x^2)$ представляет собой произведение множителей x^2 и $D^2 - x^2$, сумма которых $x^2 + (D^2 - x^2) = D^2$ постоянна. Поэтому наибольшим это произведение будет при условии $x^2 = D^2 - x^2$, то есть при $x = \frac{\sqrt{2}}{2}D$. Тогда высота прямоугольника будет равна также $\frac{\sqrt{2}}{2}D$, и, следовательно, это **квадрат**.

3. *Задача о наивыгоднейшей скорости корабля.*

Стоимость хода корабля складывается из стоимости расходуемого двигателями горючего и остальных расходов. Установлено, что стоимость горючего пропорциональна третьей степени скорости хода корабля. Остальные расходы от скорости хода не зависят, и их можно считать постоянными. Необходимо определить скорость хода корабля, при которой расходы на каждый километр пройденного пути будут наименьшими.

Если скорость хода корабля небольшая, то и расход горючего небольшой, но зато корабль долго будет находиться в пути и остальные расходы окажутся большими. Наоборот, при большой скорости хода расход горючего будет большим, но остальные расходы уменьшатся, так как уменьшится время хода. Требуется найти такую скорость (ее называют экономической), при которой общий расход на 1 *км* пути был бы наименьшим.

Пусть A (руб.) — стоимость горючего, расходуемого за 1 час хода корабля, а B (руб.) — остальные расходы на каждый час хода. По условию задачи $A = kv^3$ (k — коэффициент пропорциональности для данного корабля). Тогда стоимость одного часа хода корабля (в рублях) равна $kv^3 + B$, и, значит, расходы на 1 *км* пути составят $s = \frac{kv^3 + B}{v}$. Получившуюся функцию представим в виде $s = kv^2 + \frac{B}{v}$ и перепишем ее так: $s = kv^2 + \frac{B}{2v} + \frac{B}{2v}$. Получилась сумма трех слагаемых. Найдем их произведение: $kv^2 \cdot \frac{B}{2v} \cdot \frac{B}{2v} = \frac{kB^2}{4}$. Оно оказалось постоянным. Поэтому рассматриваемая сумма имеет наименьшее значение при условии равенства слагаемых. Получаем: $kv^2 = \frac{B}{2v}$, откуда $v = \sqrt[3]{\frac{B}{2k}}$. Итак, экономическая скорость хода корабля: $\sqrt[3]{\frac{B}{2k}}$.

Рассмотренные задачи показывают, как хорошо служат решению задач на экстремумы следствия из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим. Правда, при использовании их приходится проявлять сообразительность. Ну что ж, тем лучше!

РАЗЛИЧНЫЕ ПРИЕМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ЭКСТРЕМУМЫ

Мы рассмотрели несколько достаточно простых задач на экстремумы. Приемы решения этих задач были разнообразными. Они существенно зависели от вида той функции, экстремум которой приходилось находить. Очень действенным оказался прием, основанный на использовании неравенств. Но чтобы пользоваться этим приемом, необходимо располагать подходящими неравенствами, и их в нашем распоряжении должно быть много.

Нам представился удобный случай подчеркнуть, что неравенства в математике и ее приложениях играют особенно важную роль. За последние десятилетия ученые приложили большие усилия для уточнения и обобщения известных неравенств, открытия новых типов неравенств и применения неравенств в различных областях математики и смежных с ней науках. Объем исследований по неравенствам возрос во много раз, и неравенства завоевали много новых областей, в которых они играют главенствующую роль. И в нашей книжке часто приходится пользоваться неравенствами. Вот еще один пример, подтверждающий сделанный вывод.

Задача о пчелиных сотах.

Хорошо известно, что пчелиные соты состоят из ячеек в виде десятигранников. Представить себе такую ячейку можно следующим образом. Возьмем правильную шестиугольную призму (рис. 7). Через каждую из трех диагоналей верхнего основания B_1D_1, D_1F_1 и F_1B_1 и точку S, взятую на оси этой призмы, проведем плоскость.

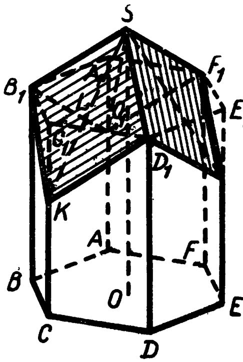


Рис 7

Эти плоскости и будут ограничивать сверху ячейку. Таким образом, ячейка ограничена снизу правильным шестиугольником, с боков — шестью равными прямоугольными трапециями и сверху — тремя равными ромбами. Объем ячейки, как легко видеть, равен объему исходной призмы.

Возникает вопрос: каким должен быть плоский угол при вершине S ячейки, чтобы расход воска на изготовление ячейки был наименьшим? Иными словами, каким должно быть положение точки S, чтобы площадь поверхности ячейки была наименьшей?

Для ответа на этот вопрос введем обозначения: $O_1S = x$, $(x > 0)$, $BC = a$, $BB_1 = h$. Пользуясь ими, найдем сначала площадь каждой трапеции. Она равна $\frac{BB_1 + CK}{2} BC$, или $\frac{h + (h - x)}{2} a$ (так как $C_1K = O_1S$). Площадь же каждого ромба равна $\frac{B_1D_1 \cdot SK}{2}$, или в принятых обозначениях $\frac{a\sqrt{3}\sqrt{4x^2 + a^2}}{2}$. Площадь нижнего основания можно не принимать в расчет, так как от положения точки S она не зависит. Поэтому интересующая нас площадь выразится формулой $Q = 3 \cdot \frac{a}{2}\sqrt{12x^2 + 3a^2} + 3a(2h - x)$, или $Q = 3a\left(\frac{1}{2}\sqrt{12x^2 + 3a^2} - x\right) + 6ah$. Эта площадь будет иметь наименьшее значение, если наименьшим будет выражение $\frac{1}{2}\sqrt{12x^2+3a^2}-x$. Обозначив эту разность через y, получим: $y=\frac{1}{2}\sqrt{12x^2+3a^2}-x$, или $8x^2-8yx+3a^2-4y^2=0$, откуда $x=\frac{2y+\sqrt{6(2y^2-a^2)}}{4}$ $(x>0)$. Так как расстояние x должно быть действительным числом, то поэтому получаем неравенство $2y^2-a^2\geqslant 0$, или $y\geqslant\frac{a}{\sqrt{2}}$. Значит, наименьшее значение y, при котором и Q будет иметь наименьшее значение, должно быть равно $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Соответствующее ему значение x легко находится. Получаем, что при $x=\frac{a\sqrt{2}}{4}$ расход воска будет наименьшим.

Зная x, нетрудно найти плоский угол при вершине S. Это можно сделать так: $\operatorname{tg}\frac{\angle B_1SD_1}{2}=\frac{B_1L}{SL}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2+\frac{a^2}{4}}}=$ $=\sqrt{2}$. Поэтому $\angle B_1SD_1\approx 109^\circ 28'$. Непосредственные измерения подтверждают полученный результат. Пчела оказалась хорошим «математиком».

Можно подсчитать экономию воска, которая получается при такой форме ячейки (по сравнению с шестиугольной призмой). Приближенно она равна 2%. Более точно эту экономию можно выразить так: из воска, сэкономленного на устройстве 54 ячеек, пчелы могут дополнительно построить еще одну ячейку. Экономия значительная.

ПРИМЕРЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЭКСТРЕМУМОВ

Если обратиться к геометрическим задачам на экстремумы, решаемым с помощью геометрических средств, то окажется, что используемые здесь приемы особенно разнообразны. Для нахождения экстремумов геометрических величин могут быть использованы многие теоремы геометрии. Разберем хотя бы такие задачи.

1. *Дан угол ABC и внутри него точка D. Требуется построить треугольник, две вершины которого лежали бы*

соответственно на сторонах данного угла, а третьей вершиной была бы точка D и который имел бы наименьший периметр.

Возьмем произвольный треугольник DKL, две вершины которого лежат соответственно на сторонах BA и BC, а третьей вершиной служит точка D (рис. 8). Построим точки E и F, симметричные точке D относительно сторон угла BA и BC, и соединим отрезками прямой эти точки соответственно с вершинами K и L треугольника. Так как $KE = KD$ и $LF = LD$, то длина ломаной $EKLF$ равна периметру треугольника DKL. Но нас интересует треугольник с наименьшим периметром, а наименьшим будет периметр, равный длине отрезка EF. Поэтому вершины K_1 и L_1 искомого треугольника определяются как точки пересечения прямой EF со сторонами данного угла.

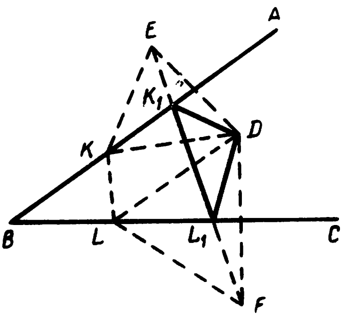


Рис. 8

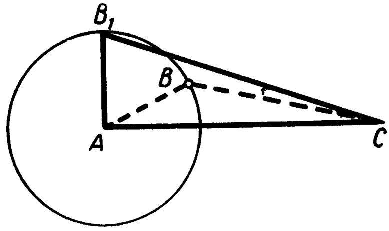


Рис 9

2. *Какой из треугольников с двумя данными сторонами имеет наибольшую площадь?*

Построим отрезок AC, равный одной из данных сторон. Из конца его A, как из центра, радиусом, равным второй данной стороне, опишем окружность. На этой окружности возьмем произвольную точку B (не лежащую на прямой AC). Соединив эту точку B отрезками с точками A и C, получим треугольник с двумя данными сторонами (рис. 9). Из всех таких треугольников наибольшую площадь будет иметь тот, у которого высота h_b будет наибольшей. Но наибольшее возможное значение высоты равно длине радиуса окружности (AB_1). Поэтому наибольшую площадь из всех треугольников с двумя данными сторонами имеет такой, в котором эти стороны образуют прямой угол.

3. *Внутри угла A дана точка O. Требуется провести прямую через точку O так, чтобы она отсекла от угла A треугольник с наименьшим периметром.*

Впишем в данный угол окружность, проходящую через данную точку O (из двух таких окружностей возьмем ту, радиус которой больше, рис. 10). Через точку O проведем касательную MN к этой окружности. Эта касательная и отсечет треугольник наименьшего периметра. Докажем это. Проведем через O какую-нибудь иную прямую ED, пересекающую стороны угла (она пересечет и дугу BOC). Сравним периметр треугольника AED с периметром треугольника AMN. Для этого построим еще касательную KL к дуге BOC, параллельную ED. Сравним периметры треугольников AMN и AKL. Они равны, так как каждый из них равен сумме отрезков AB и AC. Но периметр треугольника AED больше периметра треугольника AKL, а значит, больше и периметра треугольника AMN.

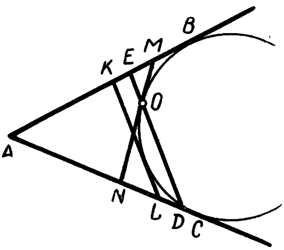


Рис. 10

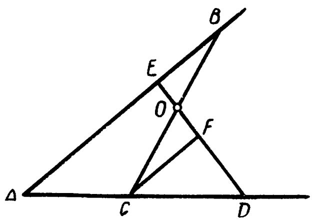


Рис. 11

4. *Внутри угла A дана точка O. Требуется провести через O прямую так, чтобы она отсекла от угла треугольник наименьшей площади.*

Искомой прямой будет такая прямая BC, отрезок которой, заключенный между сторонами угла, делится точкой O пополам (рис. 11).

Для доказательства построим еще какую-нибудь прямую, проходящую через O и пересекающую стороны угла. Сравним площади треугольников ABC и AED. Если через C провести прямую, параллельную EB, то получим треугольник OCF, равный треугольнику EBO. Поэтому площадь треугольника OCD больше площади треугольника OEB, и, значит, площадь треугольника ABC меньше площади треугольника AED.

5. *Дан треугольник ABC и внутри него две точки D и E* (рис. 12). *Как кратчайшим путем пройти из одной точки в другую, побывав на каждой стороне треугольника?*

Выполним следующее построение. Построим точки D_1 и E_1, симметричные D и E относительно AC и BC. Построим также точку D_2, симметричную D_1 относительно AB. Проведем отрезок D_2E_1 и построим ломаную $DMKLE$. Длина ее равна длине отрезка D_2E_1. Легко сообразить, что всякий иной путь из D в E, с тем же порядком захода на стороны данного треугольника, будет длиннее. Но можно было бы порядок захода на стороны треугольника избрать иной (выполнив такие же построения). Всего таких ломаных линий, как $DMKLE$, получится три. Останется выбрать из них имеющую наименьшую длину, для чего достаточно сравнить три таких отрезка, как D_2E_1.

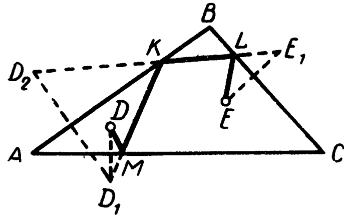


Рис. 12

6. *Рассмотрим еще задачу об экономном расходовании материалов. Попытаемся установить, для какой крыши (двускатной или четырехскатной) потребуется больше кровельного материала.*

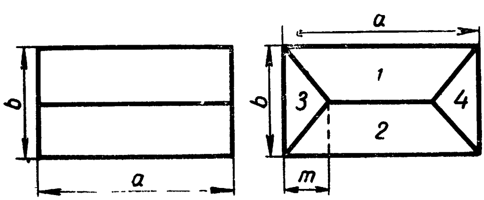


Рис 13

Будем считать, что оба ската двускатной крыши наклонены к горизонтальной плоскости под углом φ, скаты 1 и 2 четырехскатной крыши — под тем же углом φ, а 3 и 4— под углом α (рис. 13). При этих предположениях и указанных на чертеже размерах площадь двускатной крыши будет равна $S_1 = \frac{ab}{\cos\varphi}$, а четырехскатной — $S_2 = \frac{bm}{\cos\alpha} + \frac{b(a-m)}{\cos\varphi}$.

Для сравнения этих площадей рассмотрим разность их $S_2 - S_1 = bm\left(\frac{1}{\cos\varphi} - \frac{1}{\cos\varphi}\right)$. Здесь $b > 0$, $m > 0$, $0 < \alpha < 90°$ и $0 < \varphi < 90°$. Поэтому при $\alpha < \varphi$ получим $S_2 - S_1 < 0$, при $\alpha = \varphi$ будем иметь $S_2 - S_1 = 0$, а при $\alpha > \varphi$ $S_2 - S_1 < 0$. Следовательно, если все скаты как двускатной, так и четырехскатной крыш будут одинаково наклонены к горизонтальной плоскости, то кровельного материала понадобится одинаково на обе крыши. Если же скаты 3 и 4 четырехскатной крыши будут иметь больший угол наклона, чем скаты 1 и 2, то для четырехскатной крыши кровельного материала понадобится больше, чем для двускатной, а при меньшем угле — меньше.

ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

Обратимся к функции третьей степени $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, где a, b, c и d — действительные числа и $a \neq 0$. Чтобы найти локальные экстремумы этой функции поступим так же, как мы это делали в случае квадратной функции (вспомните второе доказательство теоремы об экстремуме квадратной функции). Введем в рассмотрение прямую $y = h$. При различных значениях h эта прямая может иметь с графиком данной функции третьей степени одну точку пересечения, или три, или, наконец, одну точку пересечения и одну точку касания (рис. 14). Нас и здесь, как в случае квадратной функции, интересует последняя возможность Имея систему уравнений

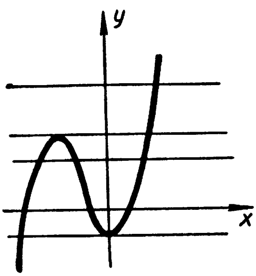


Рис. 14

$$\begin{cases} y = ax^3 + bx^2 + cx + d, \\ y = h, \end{cases}$$

получаем уравнение $h = ax^3 + bx^2 + cx + d$, или $ax^3 + bx^2 + cx + d - h = 0$ Если через x_0 обозначить абсциссу точки пересечения графика рассматриваемой функции и прямой $y = h$, то x_0 является корнем уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d - h = 0$ и мы можем поэтому понизить степень уравнения. Разделив $ax^3 + bx^2 + cx + d - h$ на $x - x_0$, получим частное $ax^2 + (ax_0 + b)x + ax_0^2 + bx_0 + c$ и остаток $ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d - h$. Так как x_0 — корень уравнения, то остаток должен быть равен 0, то есть $ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d - h = 0$. Частное же должно иметь два равных корня, так как нас интересует точка касания. Корни частного таковы:

$$x_{1,2} = \frac{-(ax_0 + b) \pm \sqrt{-3a^2x_0^2 - 2bax_0 - 4ac + b^2}}{2a}.$$

Чтобы они оказались равными, должно быть $-3a^2x_0^2 - 2abx_0 - 4ac + b^2 = 0$, откуда

$$x_0 = \frac{-b \pm \sqrt{4b^2 - 12ac}}{3a} \quad (b^2 - 3ac \geqslant 0).$$

При этих значениях x_0 абсцисса точки касания ($x_1 = x_2$) будет равна $x_{1,2} = \frac{-(ax_0 + b)}{2a}$, или $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$ *. То обстоятельство, что нашлись два значения для x_0 и два значения абсцисс точек касания, нас не должно смущать. Оно объясняется тем, что прямая $y = h$ касается графика данной функции дважды (рис 14). Значит, если функция третьей степени имеет локальные экстремумы, то их обязательно два и один из них максимум, а другой минимум[1] Если $a > 0$, то максимум будет при x, равном меньшей дроби (*), а минимум — большей. Если же $a < 0$, то наоборот.

Вот, пожалуй, и вся теория вопроса Разобравшись в ней, мы подготовились к решению таких задач на экстремумы, которые приводят к функциям третьей степени

Решим, например, *задачу о балке наибольшей прочности.*

Пусть x — ширина балки, h — высота ее и Q — величина, характеризующая прочность балки. Из рисунка 3 усматриваем, что $h^2 = 4R^2 - x^2$, и, значит, прочность балки характеризуется величиной $Q = kx(4R^2 - x^2)$ где k — коэффициент пропорциональности. При нахождении значения x, для которого получившаяся функция имеет экстремум, постоянный множитель k можно и не учитывать. Поэтому рассмотрим функцию $Q_1 = -3x^3 + 4a^2x$. По выведенной формуле (*) найдем значения аргумента, для которых эта функция имеет экстремумы. В данном случае $a = -1$, $b = 0$, $c = 4R^2$ и $d = 0$, поэтому $x = \frac{\pm\sqrt{12R^2}}{-3}$, или $x = \mp \frac{2R\sqrt{3}}{3}$. Так как отрицательной ширина быть не может, то $x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$, и при этом значении x исследуемая функция будет иметь локальный максимум, равный $k\frac{2R\sqrt{3}}{3}\left(4R^2 - \frac{4R^2 3}{9}\right)$, или $\frac{16\sqrt{3}}{9}kR^3$. Остается сравнить этот максимум со значениями рассматриваемой функции в концах промежутка изменения x $0 < x < 2R$ Но в данном случае рассматриваемая функция в точках 0 и $2R$ по смыслу задачи неопределена. Следовательно, наибольшую прочность будет иметь балка, ширина которой равна $x = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$ и высота которой $h = \frac{2\sqrt{6}R}{3}$, то есть при $\frac{h}{x} = \sqrt{2} \approx 1{,}4$ Именно такое отношение высоты к ширине балки и рекомендуется в книгах по строительному делу

Задачу об открытом сверху ящике (стр. 8,9) решите самостоятельно.

---

[1] Функция третьей степени, например $y = x^3$, может и не иметь экстремума.

КАСАТЕЛЬНАЯ К КРИВОЙ ЛИНИИ

В ходе второго доказательства теоремы об экстремуме квадратной функции и при решении общей задачи на экстремум функции третьей степени мы пользовались понятием касательной к кривой линии. Этим понятием нам придется пользоваться и дальше. Поэтому следует заняться его уточнением.

Что же такое касательная к кривой линии? Если говорить о касательной к окружности, то это такая прямая линия, которая с окружностью имеет одну и только одну общую точку. Такое определение не является общим. Общее определение касательной таково. Возьмем какую-нибудь кривую линию (рис. 15), отметим на ней две точки A и B и построим секущую прямую AB. Если заставить точку B неограниченно приближаться к точке A, то положение секущей будет меняться и она будет стремиться занять положение прямой AC. Вот эта прямая AC и называется **касательной** к данной кривой в точке A. Касательная к кривой в точке A — это предельное положение секущей, когда точка B по кривой стремится к A.

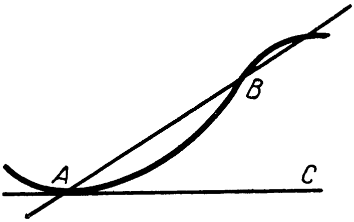


Рис. 15

Касательную к кривой мы получим и в том случае, если точки A и B пересечения секущей AB с кривой, перемещаясь по этой кривой, будут неограниченно сближаться. Точкой касания в этом случае будет та точка, в которую стягивается отрезок AB секущей (или дуга AB кривой).

Для построения касательной к данной кривой, проходящей через данную точку этой кривой, достаточно знать **угловой коэффициент касательной**. Если k — угловой коэффициент касательной и (x_0, y_0) — точка касания, то уравнение касательной таково: $y - y_0 = k(x - x_0)$, или $y = kx - kx_0 + y_0$. Как находить угловой коэффициент касательной, мы расскажем дальше, а сейчас рассмотрим одну интересную задачу на экстремумы, для решения которой удобно воспользоваться касательной.

Задача о канале наименьшей длины.

Две реки — Синюю и Голубую — следует соединить каналом (рис. 16). *Река Синяя там, где должен прохо-*

дить канал, имеет вид параболы $y = x^2$, а река Голубая — вид прямой линии $x - y - 2 = 0$. Соединяющий реки канал должен иметь наименьшую длину. Как его нужно проложить?

Для решения этой задачи прежде всего найдем уравнение прямой, параллельной реке Голубой и касающейся реки Синей. Уравнение искомой прямой, раз она должна быть параллельна прямой $x - y - 2 = 0$ ($y = x - 2$), должно иметь вид $y = x + b$ (угловые коэффициенты параллельных прямых равны), где b — отрезок, отсекаемый искомой прямой на оси y-ов. Искомая прямая и парабола $y = x^2$ должны иметь одну и только одну общую точку. Чтобы найти координаты этой точки (она и будет точкой касания), нужно решить систему уравнений

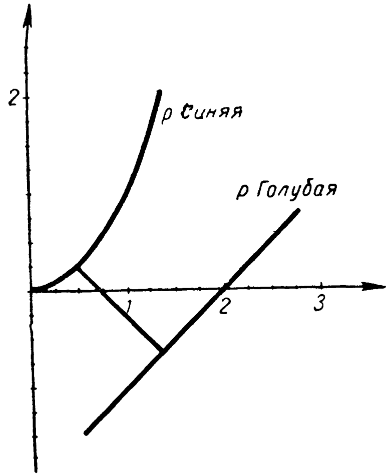


Рис 16

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = x + b. \end{cases}$$

Имеем: $x^2 - x - b = 0$, $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4b}}{2}$. Так как должно быть $x_1 = x_2$, то $1 - 4b = 0$ и $b = \frac{1}{4}$. Следовательно, $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ — абсцисса точки касания, а ордината ее равна $\frac{1}{4}$ (так как $y = x^2$). Точка касания $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ является наиболее близкой точкой реки Синей по отношению к реке Голубой. Она и должна быть началом канала. Остается из этой точки на прямую $x - y - 2 = 0$ опустить перпендикуляр, и точка пересечения его с этой прямой даст конец канала. Впрочем, конец канала можно найти и вычислениями. Для этого найдем уравнение прямой, проходящей через начало канала и перпендикулярной реке Голубой. Оно равно: $y-\frac{1}{4}=-\left(x-\frac{1}{2}\right)$ (угловой коэффициент этой прямой обратен по абсолютной величине и противоположен по знаку угловому коэффициенту прямой $x-y-2=0$). После упрощений получаем: $y=-x+\frac{3}{4}$. Остается найти координаты точки пересечения этих взаимно перпендикулярных прямых. Получим: $x=\frac{11}{8}$, $y=-\frac{5}{8}$. Значит, концом искомого канала служит точка $\left(\frac{11}{8}, -\frac{5}{8}\right)$

Читатель может вычислить длину этого канала. Для этого нужно внимательно рассмотреть чертеж и применить теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику, гипотенузой которого служит канал, а катеты параллельны координатным осям.

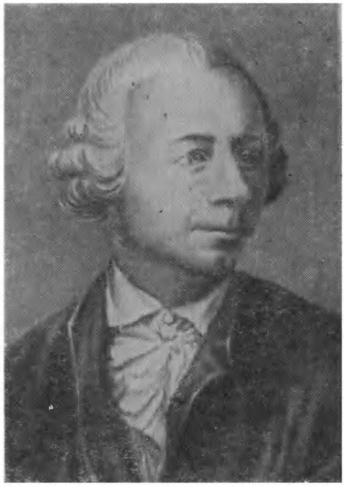
ЧТО ТАКОЕ ПРОИЗВОДНАЯ?

Мы рассмотрели довольно много задач на нахождение экстремумов. Те приемы, которыми мы решали эти задачи, оказались весьма разнообразными и порой довольно искусственными. Дело обстоит так, что почти для каждой задачи на экстремум приходилось «изобретать» подходящий для нее прием. Возникает поэтому вопрос: а нет ли достаточно общего приема решения задач на экстремумы? Такой прием есть. Его дает нам математический анализ.

Пьер Ферма

Одной из основных причин, вызвавших возникновение математического анализа, в особенности такой части его, как дифференциальное исчисление, была потребность в решении задач на экстремумы. Много и успешно решением разнообразных задач на экстремумы занимались выдающиеся математики XVII века: Блез Паскаль (1623 — 1662), Пьер Ферма (1601—1665) и др. Их работами было подготовлено введение основных понятий мате-

Блез Паскаль



Леонард Эйлер

матического анализа. Общий метод математического анализа был разработан Исааком Ньютоном (1643 — 1727) и Готфридом Вильгельмом Лейбницем (1646—1716). В последующем развитии математического анализа (XVIII в.) особенно важную роль сыграл Леонард Эйлер (1707 — 1783).

Прежде чем рассматривать этот общий прием решения задач на нахождение экстремумов, подготовим все самое необходимое.

Основное понятие, которым нам придется пользоваться при изложении общего приема решения задач на экстремумы, – это понятие производной О роли его в математике и ее приложениях можно было бы сказать так Представим себе математика, хорошо знающего основы этой науки. Если бы его попросили назвать десять наиболее важных для самой математики и ее приложений понятий то он, наверное, назвал бы и понятие производной

Основательно понятие производной изучается в высшей школе, первое же знакомство с ним можно осуществить и в средней школе. В новых учебниках по алгебре для старших классов понятие производной излагается, и читатель нашей книжки может обратиться к ним. Если же у него не окажется такого учебника под руками, то пусть он внимательно прочитает этот параграф. Мы кратко сообщаем в нем самое необходимое.

При изучении изменяющихся величин очень часто возникает вопрос о скорости, о быстроте происходящего изменения Так мы говорим о скорости движения самолета, поезда, автобуса, ракеты, о скорости падения камня, вращения шкива и т д Можно говорить о скорости выполнения определенной работы, о скорости протекания химической реакции, о быстроте роста населения в данном городе и т. д О скорости можно говорить по отношению к любой величине, которая изменяется с течением времени. Больше того, понятие скорости изменения применимо и к таким переменным величинам, которые непосредственно со временем не связаны Например, можно говорить о скорости подъема дороги.

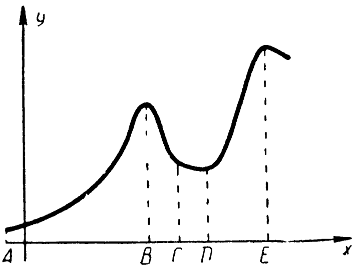


Рис. 17

Возьмем произвольную функцию $y = f(x)$ Пусть график ее — плавная, непрерывная кривая линия, изображенная на чертеже (рис 17) Ордината точки графика y зависит от абсциссы x и изменяется с изменением ее Можно говорить о скорости изменения функции y. Действительно, на участке AB оси x-ов функция возрастает, сначала медленно, потом быстрее. На участке BC функция быстро убывает, а на участке CD убывание ее замедляется и т д. График показывает, что скорость возрастания функции на участке AB меньше, чем на участке DE, и т. д

Возникает вопрос нельзя ли научиться характеризовать скорость изменения функции числом? Чтобы разобраться в этом вопросе, обратимся к прямолинейному движению Если бы это движение было равномерным, то для вычисления скорости его нужно было бы пройденный путь разделить на время движения Все было бы очень просто. Поэтому возьмем неравномерное движение, например свободное падение камня Из физики известно, что путь, пройденный свободно падающим телом, если не учитывать влияния сопротивления воздуха, равен $s = \frac{gt^2}{2}$, где s — путь в метрах, $g \approx 9{,}8$ *м/сек*^{2} — ускорение, t — время падения в секундах Будем рассматривать, например, момент времени 2 секунды от начала падения и проследим за падающим камнем в следующие h секунд За эти h секунд камень пройдет путь, равный разности между всем путем за $2 + h$ секунд и путем за 2 секунды, то есть $\frac{g(2+h)^2}{2} - \frac{g2^2}{2}$, или $2gh + \frac{gh^2}{2}$. Легко найти выражение средней скорости падения камня за промежуток времени h секунд:

$$v_{\text{ср}} = \frac{2gh + \frac{gh^2}{2}}{h} = 2g + \frac{gh}{2}.$$

Но средняя скорость характеризует неравномерное движение неполно, недостаточно. Чем больше промежуток времени, тем эта характеристика менее точна, и наоборот, чем меньше промежуток времени, тем она точнее. Поэтому неравномерное движение характеризует м г н о в е н н а я с к о р о с т ь, равная $\lim\limits_{h \to 0} v_{\text{ср}}$ Если бы в рассматриваемый момент времени на тело перестала действовать сила и оно стало бы двигаться равномерно по инерции, то скорость этого движения и была бы как раз равна $\lim\limits_{h \to 0} v_{\text{ср}}$. В нашем случае мгновенная скорость падения камня в момент времени $t=2$ секундам равна $\lim\limits_{h\to 0}\left(2g+\frac{gh}{2}\right)=2g$, или приближенно 19,6 *м* в секунду. Отметим, что нам пришлось найти предел отношения приращения пути к приращению времени при условии, что приращение времени стремится к 0.

Аналогично будем поступать для нахождения скорости изменения функции в общем случае Если функция задана формулой $y=f(x)$, то для нахождения скорости ее изменения при $x=x_0$ дадим прежде всего выбранному значению аргумента приращение h (h может быть и отрицательным числом) Тогда функция получит приращение, которое будет равно $f(x_0+h)-f(x_0)$. Средняя скорость изменения функции выразится отношением $v_{\text{ср}}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Мгновенная же скорость изменения функции будет равна: $\lim\limits_{h\to 0} v_{\text{ср}}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Этот предел и называется производной данной функции $f(x)$, при $x=x_0$

Производной данной функции $f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной (когда это приращение независимой переменной стремится к 0).

При вычислении указанного предела x следует считать постоянным Обозначается производная так: y', или $f'(x)$.

Найдем для примера производную функции $y=x^3$. Выберем прежде всего некоторое значение x (зафиксируем его) и будем считать его дальше постоянным Дадим выбранному значению x приращение h. Функция получит приращение, равное $(x+h)^3-x^3$, или $3x^2h+3xh^2+h^3$ Запишем отношение найденного приращения функции к вызвавшему его приращению независимой переменной величины: $\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=3x^2+3xh+h^2$ Найдем предел этого отношения при $h\to 0$. $\lim\limits_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$. Значит, $y'=3x^2$, или $(x^3)'=3x^2$.

Нам нет здесь необходимости выводить нужные п р а в и л а н а х о ж д е н и я п р о и з в о д н ы х от различных функций. Мы возьмем их готовыми. Вот они:

1) $(c)'=0$ (c — постоянная величина),
2) $(x^a)'=ax^{a-1}$ (a — любое действительное число),
3) $(\sin x)'=\cos x$,
4) $(\cos x)'=-\sin x$,
5) $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$,
6) $(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$,
7) $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$ ($\ln a$ — логарифм числа a при основании, равном иррациональному числу 2, 718281...).

Пусть u и v — функции одного независимого переменного.

8) $(u\pm v)'=u'\pm v'$,
9) $(uv)'=u'v+uv'$,
10) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$,
11) если $y=f(x)$ и $u=\varphi(x)$, то $y'_x=f'_u(u)\,\varphi'_x(x)$.

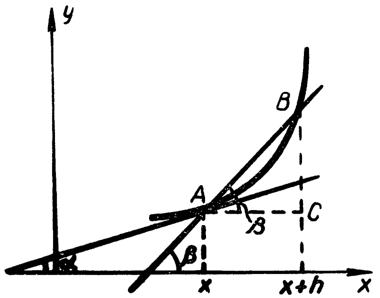


Рис. 18

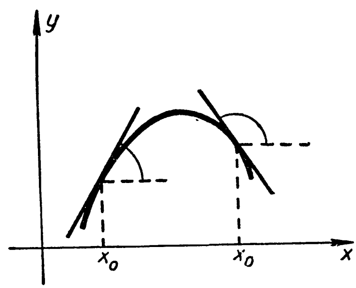


Рис. 19

Выясним еще геометрический смысл производной. Обратимся для этого к графику функции $y = f(x)$ (рис. 18) Зафиксируем некоторое значение x и дадим ему приращение h.

Этим двум значениям независимой переменной: x и $x+h$ соответствуют две точки A и B графика функции Проведем через них прямую, это будет секущая прямая. Приращение функции на нашем чертеже изобразится отрезком BC, а значит, отношение приращения функции к приращению независимой переменной равно отношению катетов прямоугольного треугольника ACB. Поэтому $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg}\beta$, где β — угол, образованный секущей AB с положительным направлением оси x-ов. Если h будет уменьшаться, стремясь к 0, то точка B будет перемещаться по графику, приближаясь к A, а секущая AB будет поворачиваться вокруг точки A Предельным положением секущей будет касательная к графику функции в точке A Угловой коэффициент касательной равен:

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{h\to 0}\operatorname{tg}\beta = \lim_{h - 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x).$$

Таким образом, *значение производной функции $f(x)$, при данном значении x, равно угловому коэффициенту касательной к графику $f(x)$, проходящей через точку его, соответствующую данному значению x.*

Геометрическим смыслом производной с успехом можно воспользоваться для нахождения касательных к кривым линиям. Пусть, например, требуется найти касательную к графику функции $y = 2x^2 + 3x - 5$, проходящую через точку графика (2, 9). Уравнение любой прямой, проходящей через данную точку, как об этом говорилось выше, таково: $y - 9 = k(x-2)$, или $y = kx - 2k + 9$. Нас интересует касательная прямая, значит, угловой коэффициент ее k должен быть равен производной данной функции при $x = 2$, то есть $k = y\,\big|_{x=2} = 4x + 3\,\big|_{x=2} = 11$. Получаем уравнение касательной

$$y = 11x - 13.$$

Геометрический смысл производной позволяет легко устанавливать, как ведет себя данная функция $f(x)$ для значений x, достаточно близких к заданному x_0. Если $f'(x) > 0$, то угловой коэффициент касательной к графику $f(x)$ при $x = x_0$ — положителен, то есть касательная образует с положительным направлением оси x-ов острый угол (так как тангенс этого угла положителен). Но это означает (рис. 19), что график функции при возрастании x (вблизи от x_0) поднимается вверх, то есть функция возрастает. Если же $f'(x) < 0$, то данная функция при возрастании x (вблизи от x_0) убывает. Доказывать сделанные выводы мы не будем Ограничимся приведенной наглядной их иллюстрацией

ОСНОВНОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА НАХОЖДЕНИЕ ЭКСТРЕМУМОВ

Общий прием решения задач на экстремум опирается на теорему Ферма:

Если функция $y = f(x)$ (имеющая производную) при $x = x_0$ принимает локальный максимум или минимум, то производная от этой функции при $x = x_0$ обращается в 0.

Геометрически это означает, что касательная к графику функции в соответствующей точке его параллельна оси x-ов (рис. 20).

Теорема Ферма очень наглядна. И все же докажем ее.

Пусть x_0 — точка максимума функции $y = f(x)$, то есть при $x = x_0$ эта функция принимает наибольшее значение. Дадим x_0 достаточно малое положительное приращение h. Новое значение аргумента $x_0 + h$ будет достаточно близким к x_0, и так как при $x = x_0$ данная функция имеет максимум, то[1] $(x_0 + h) - f(x_0) \leqslant 0$. Поэтому $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leqslant 0$, а значит,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \leqslant 0.$$

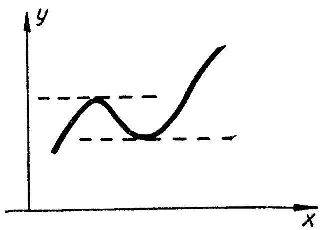


Рис. 20

[1] h берется такое, чтобы для всех точек отрезка оси x-ов от $x_0 - h$ до $x_0 + h$ выполнялось неравенство $f(x_0 + h) \leqslant f(x_0)$ или $f(x_0 + h) - f(x_0) \leqslant 0$.

Если же дать x_0 отрицательное приращение (достаточно малое по абсолютной величине), то получим:

$$f(x_0+h)-f(x_0)\leqslant 0 \text{ и } \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}>0,$$

$$\text{а значит, } \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)\leqslant 0.$$

Оказалось, что одно и то же число $f'(x)$ неположительно и неотрицательно. Это означает, что это число равно 0, то есть $f'(x_0)=0$. Рассуждения в случае минимума аналогичны.

Чему же учит нас теорема Ферма? Она учит нас тому, что значения аргумента, при которых данная функция $f(x)$ имеет локальные экстремумы, следует искать среди корней уравнения $f'(x)=0$. Она выражает необходимое условие экстремума:

Для того чтобы функция (имеющая производную) имела при $x=x_0$ максимум или минимум, необходимо, чтобы производная при этом значении x была равна 0.

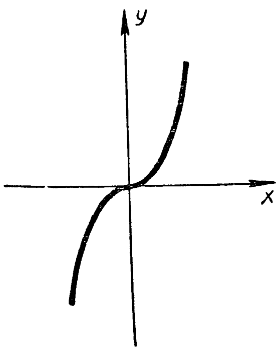


Рис 21

Необходимо, но не достаточно! Производная может быть равна 0, и все же при этом значении x функция экстремума может и не иметь. Так, например, производная функции $y=x^3$ ($y'=3x^2$) при $x=0$ обращается в 0, но эта функция при $x=0$ экстремума не имеет (рис. 21). Значит, уравнение $f'(x)=0$ дает лишь «подозрительные» на экстремум значения x.

Как же из этих «подозрительных» значений выделить те, при которых рассматриваемая функция действительно имеет экстремумы? Как для выделенных значений установить вид экстремума?

По этим вопросам мы ограничимся соображениями, источником которых является наглядность. Рассмотрим рисунок 22, на котором изображены максимум и минимум функции $y=f(x)$. По этому рисунку установим, какие по знаку значения принимает производная функция $f'(x)$

для значений x, достаточно близких к x_0, меньших и больших его.

Если при $x = x_0$ данная функция имеет максимум, то для значений x, меньших x_0, но достаточно близких к x_0, производная будет положительна, а для бо́льших — отрицательна, так как в первом случае касательная к графику функции образует с положительным направлением оси

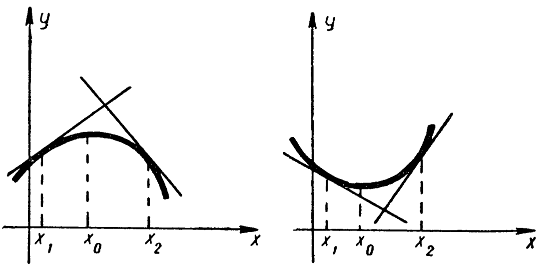


Рис. 22

x-ов острый угол, а во втором — тупой. Если же при $x = x_0$ функция принимает минимальное значение, то получается наоборот. Таким образом, будет ли «подозрительная» точка x_0 точкой экстремума и, если будет, то какого именно (максимума или минимума), зависит от значений, принимаемых в достаточной близости слева и справа от точки x_0 производной функцией. Все возможные случаи можно записать в следующей таблице (табл. 1).

Таблица 1

	$x_0 + \Delta x$, $\Delta x < 0$	x_0	$x_0 + \Delta x$ $\Delta x > 0$	Поведение $f(x)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	максимум
$f'(x)$	$-$	0	$+$	минимум
$f'(x)$	$+$	0	$+$	возрастает (экстремума нет)
$f'(x)$	$-$	0	$-$	убывает (экстремума нет)

Вот этой таблицей и можно пользоваться при решении задач на экстремумы.

Но можно из этой таблицы сделать новые выводы и пользоваться ими. Вот о каких выводах идет речь.

В случае максимума с возрастанием x и переходом через значение x_0 производная убывает, поэтому производная от этой производной (то есть производная второго порядка) отрицательна. В случае минимума производная при переходе x через x_0 возрастает, а значит, производная второго порядка положительна. Поэтому если в «подозрительной» точке x_0 производная второго порядка $f''(x_0)$ отрицательна, то в этой точке данная функция имеет максимум, если же $f''(x_0)$ положительна, то функция принимает минимальное значение.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ЭКСТРЕМУМЫ С ПОМОЩЬЮ ОСНОВНОГО МЕТОДА

Чтобы проиллюстрировать рассмотренный общий прием решения задач на экстремумы, возьмем несколько задач.

Задача о прямоугольнике наибольшей площади.

Из куска стекла, имеющего указанные на рисунке 23 форму и размеры, нужно вырезать прямоугольную пластину наибольшей площади.

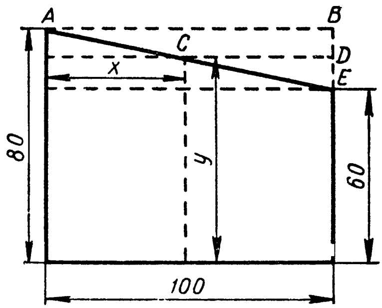


Рис. 23

Площадь пластины $S = xy$. За независимое переменное примем $x\,(0 < x \leqslant 100)$. Тогда из подобия треугольников ABE и CDE следует: $\frac{CD}{AB} = \frac{DE}{BE}$, или $\frac{100 - x}{100} = \frac{20 - (80 - y)}{20}$, откуда $y = -\frac{1}{5}x + 80$. Поэтому $S = -\frac{1}{5}x^2 + 80x$. Исследуем эту функцию на экстремум. $S' = -\frac{2}{5}x + 80$, $-\frac{2}{5}x + 80 = 0$, $x = 200$. Найденное значение x выходит из промежутка изменения x. Поэтому внутри этого промежутка стационарных точек нет. Значит, наибольшее значение S принимает в одном из концов промежутка, а именно при $x = 100$ (*мм*), а тогда $y = 60$ (*мм*) и $S = 6000$ (*мм*^{2}).

Задача о скорости течения воды в трубе.

По трубе, сечение которой круг с радиусом r, течет вода. Известно, что скорость течения пропорциональна так называемому гидравлическому радиусу профиля сечения (заполненного водой). Гидравлическим же радиусом профиля называется отношение площади профиля к длине смоченного (подводного) периметра профиля. *При каком заполнении трубы водой скорость течения (при неизменных других условиях) будет наибольшей?*

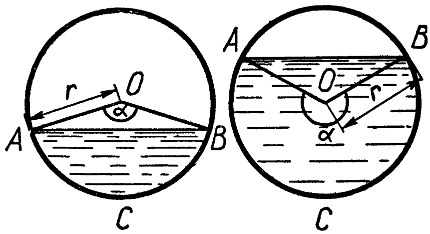


Рис. 24

Воспользуемся обозначениями: α — центральный угол сегмента заполнения трубы водой (в радианах) (рис. 24), F — площадь этого сегмента и R — гидравлический радиус. Тогда площадь сектора $OACB$ равна $\frac{1}{2}r^2\alpha$, а площадь треугольника AOB равна $\frac{1}{2}\,2r\sin\frac{\alpha}{2}r\,\cos\frac{\alpha}{2}$, или $\frac{1}{2}r^2\sin\alpha$. Поэтому $F = \frac{1}{2}r^2\alpha - \frac{1}{2}r^2\sin\alpha = \frac{1}{2}r^2(\alpha - \sin\alpha)$. Смоченный периметр равен $r\alpha$, а значит, $R = \frac{r}{2}\left(1 - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)$. Эта формула будет верна и в том случае, если α будет больше π. Вообще, α может изменяться от 0 до 2π.

Найдем R' и составим уравнение для нахождения критических значений α. Получаем $\frac{r}{2}\cdot\frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha^2} = 0$, но $\alpha \neq 0$, поэтому $\sin\alpha - \alpha\cos\alpha = 0$, или $\operatorname{tg}\alpha = \alpha$. Полученное уравнение может быть решено графически. (Сделайте это.) Единственный корень его $\alpha \approx 4{,}5$, или $\alpha \approx 258°$.

Нетрудно сообразить, что производная от R, равная $\frac{r\cos\alpha}{2\alpha^2}(\operatorname{tg}\alpha - \alpha)$ при переходе через $\alpha \approx 4{,}5$, меняет знак с + на —. Значит, при $\alpha \approx 258°$ скорость течения будет наибольшей.

Задача о наибольшем количестве теплоты.

Рассматривая основной метод решения задач на экстремум, мы ограничивались функциями, имеющими во всех точках области определения производную. Но экстремум может достигаться функцией и в такой внутренней точке области определения, где производная не существует. Такими точками являются точки излома графика, угловые точки и, в частности, может быть точки, разделяющие график функции на части, задаваемые разными формулами. Приведем пример.

На электроплитке кипятится чайник. Установить, когда он обладает наибольшим количеством теплоты[1].

Для облегчения решения будем считать коэффициент полезного действия плитки равным 100%. Отсчет времени поведем с момента, когда чайник был поставлен на плитку. Пусть в этот момент чайник обладал q калориями теплоты. Количество теплоты (в калориях), выделенное плиткой, выражается функцией $Q = 0{,}24J^2Rt$, где J — сила тока в амперах, R — сопротивление в омах и t — время нагревания в секундах, а количество теплоты в чайнике в момент времени t равно $q + 0{,}24J^2Rt$. Когда чайник закипит (в момент времени t_0), вода начнет испаряться. Известно, что на образование одного грамма пара уходит 539 калорий. За одну секунду плитка выделит теплоты $0{,}24J^2R$ калорий, которая идет полностью на парообразование. Поэтому за 1 секунду выкипает $\frac{0{,}24J^2R}{539}$ *г* воды, и с ней уносится из чайника $100\frac{0{,}24J^2R}{539} = 0{,}041J^2R$ калорий (множитель 100 здесь появляется потому, что температура кипящей воды 100°). Если $t > t_0$, то выкипевшая вода унесет из чайника $0{,}041J^2R(t-t_0)$ калорий и останется $q + 0{,}24J^2Rt_0 - 0{,}041J^2R(t-t_0) = -0{,}041\ J^2Rt + q + 0{,}281J^2Rt_0$ калорий. Значит, количество теплоты в чайнике выражается функцией

$$Q_t = \begin{cases} 0{,}24J^2Rt + q, & 0 \leqslant t \leqslant t_0 \\ -0{,}041J^2Rt + q + 0{,}281J^2Rt_0 & t > t_0 \end{cases}$$

График этой функции (на рисунке 25 он изображен схематически) состоит из двух прямолинейных участков. Угловой точкой его является точка A, в которой функция

---

[1] Эту задачу мы заимствуем из интересной книги Я. Б. Зельдович «Высшая математика для начинающих» (М., Физматгиз, 1963).

не имеет производной. По графику видно, что рассматриваемая функция имеет максимум при $t = t_0$, равный $0{,}24J^2Rt_0 + q$.

Подведем итог. Для разыскания экстремальных значений функции нужно прежде всего найти все локальные экстремумы. С этой целью нужно найти все стационарные точки, для каждой из них воспользоваться достаточными условиями максимума и минимума и вычислить экстремум в этих точках. Далее нужно вычислить значения функции в точках (если функция в них определена), где не существует производная от данной функции. Из всех найденных таким образом значений функции надо выбрать наибольшее и наименьшее.

Можно поступать и иначе. Сначала нужно вычислить значения рассматриваемой функции во всех «подозрительных» (в отношении существования экстремумов) точках: стационарных, концевых и где не существует производная. Наибольшее и наименьшее из этих чисел и будут искомыми наибольшим и наименьшим значениями функции.

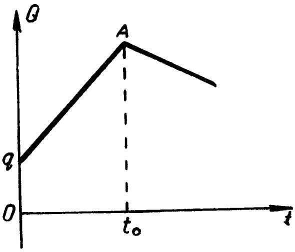


Рис. 25

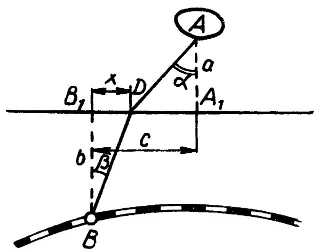


Рис. 26.

КАК ОДНА ЗАДАЧА „ТЯНЕТ" ЗА СОБОЙ МНОГИЕ ДРУГИЕ

Рассмотрим следующую з а д а ч у.

Пусть снабжение острова А происходит через железнодорожную станцию В. От береговой линии (прямой) остров удален на расстояние a *км, а железнодорожная станция на расстояние* b *км (рис. 26). Пусть далее, расстояние между основаниями перпендикуляров, проведенных к береговой линии через точки А и В, равно* c *км. Предположим еще, что перевозка одной тонны грузов на расстояние в один километр по суше стоит* m *рублей, а по морю* n *рублей* ($n < m$). *Где нужно постро-*

ить порт, чтобы перевозки грузов были наиболее дешевыми?

Обозначим расстояние B_1D через x (*км*). Тогда $DA_1 = c - x$ и длина пути груза по суше будет равна $\sqrt{b^2 + x^2}$, а по морю $\sqrt{a^2 + (c - x)^2}$. Стоимость перевозки одной тонны груза из B в A или из A в B выразится так: $y = m\sqrt{b^2 + x^2} + n\sqrt{a^2 + (c - x)^2}$. Найдем точку минимума получившейся функции, то есть значение аргумента, при котором эта функция принимает наименьшее значение:

$$y' = \frac{mx}{\sqrt{b^2 + x^2}} - \frac{n(c - x)}{\sqrt{a^2 + (c - x)^2}},$$

$$\frac{mx}{\sqrt{b^2 + x^2}} - \frac{n(c - x)}{\sqrt{a^2 + (c - x)^2}} = 0, \text{ или } \frac{mx}{\sqrt{b^2 + x^2}} = \frac{n(c - x)}{\sqrt{a^2 + (c - x)^2}},$$

а значит, $\dfrac{x}{\sqrt{b^2 + x^2}} : \dfrac{c - x}{\sqrt{a^2 + (c - x)^2}} = n : m.$

Полученное соотношение характеризует минимум рассматриваемой функции. Это очевидно. Его можно записать короче и выразительнее так: $\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \dfrac{n}{m}$. Значит, порт D надо расположить так, чтобы выполнялось равенство:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{n}{m}, \quad \text{или} \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{m}{n}.$$

Изменим рассматриваемую задачу. *Пусть, например, на побережье требуется выбрать место для швартования судов, перевозящих пассажиров. Это место должно быть выбрано так, чтобы путь от B к A пассажиры проделывали в наименьшее время. Будем считать, что скорость движения автобуса, перевозящего пассажиров, равна v_a, морского катера — v_k.*

Получившуюся новую задачу можно было бы решить, как и предшествующую. Однако в этом нет необходимости. Легко заметить, что новая задача очень просто сводится к предшествующей. Нужно только вместо m взять время, в течение которого автобус проходит 1 *км* $\left(\dfrac{1}{v_a}\right)$, а вместо n — время, за которое катер проходит 1 *км* $\left(\dfrac{1}{v_k}\right)$. Вот и все! Получим следующий результат:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_k}{v_a}.$$

Возьмем новую задачу. *Пусть, например, требуется прорыть тоннель, соединяющий пункты A и B*

(рис. 27). Представим себе, *что сверху от линии CD лежит мягкая порода, а снизу — твердая, и поэтому стоимость прохождения одного метра тоннеля выше линии CD — m рублей, а ниже — n рублей ($m < n$). Как нужно прокладывать тоннель, чтобы стоимость его была наименьшей?*

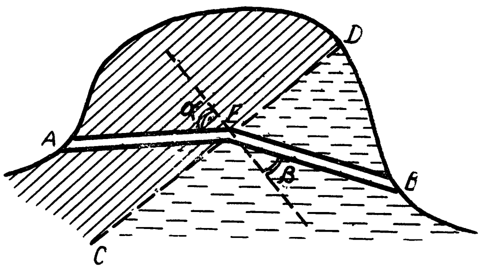


Рис. 27

Совершенно ясно, что если бы мы решили эту задачу, то получили бы такой же (по форме) результат, как и в предшествующих задачах. Для точки E должна выполняться пропорция:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{m}{n}.$$

Возьмем еще одну задачу. Ее часто называют з а д а ч е й Ф е р м а.

Пусть точки A и B лежат в двух оптически разных средах, разделенных прямой CD (рис. 28), и луч света из A должен пройти в B. Пусть, далее, скорость света в среде, где находится точка A, равна v_A, а в другой среде — v_B. В какой точке луч должен пересечь прямую CD?

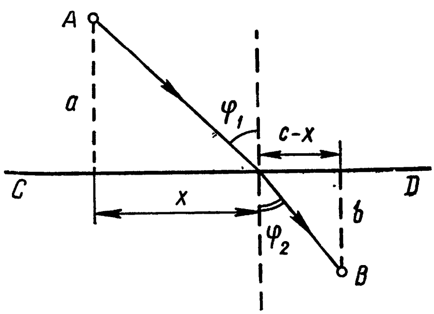


Рис. 28

Чтобы решить эту задачу, мы должны будем воспользоваться известным принципом Ферма, утверждающим, что свет идет из одной точки в другую по такому пути, для прохождения которого требуется наименьшее время.

Легко заметить, что новая задача аналогична предшествующим. Здесь $m = \frac{1}{v_A}$ — время, в течение которого луч света пройдет единицу пути в среде, содержащей точку A, а $n = \frac{1}{v_B}$ — время прохождения единицы пути в среде, содержащей B. Следовательно: $\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \frac{v_A}{v_B}$, где φ_1 — угол падения луча и φ_2 — угол преломления его.

Найденное нами соотношение $\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \frac{v_A}{v_B}$ выражает известный в оптике закон преломления света, называемый часто законом Снеллиуса.

Если бы мы пожелали найти значение x, то должны были бы найти выражение времени прохождения лучом пути из A в B $\left(t = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_A} + \frac{\sqrt{(c-x^2+b^2}}{v_B}\right)$, взять производную от него по x $\left(t' = \frac{1}{v_A}\frac{2x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{1}{v_B}\frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}}\right)$ и решить относительно x уравнение, которое получается, если найденную производную приравнять 0. Это будет уравнение 4-й степени:

$$[(v_B^2 - v_A^2)x^4 + (2cv_A^2 - 2cv_B^2)x^3 + (v_B^2c^2 + v_B^2b^2 - v_A^2c^2 - v_A^2a^2)x^2 + 2ca^2x - v_A^2a^2c^2 = 0].$$

Рассмотренные задачи очень поучительны. Конкретное содержание их различно, математическое же содержание — одинаково. В них говорится о разных величинах, но зависимости между величинами во всех этих задачах — одинаковы. По существу рассмотренные задачи являются конкретизациями одной и той же абстрактной задачи «на преломление». Именно этим объясняется то, что решение одной из них дает решение и любой другой. Одна задача «тянет» за собой все остальные.

Для математика бывает полезным задуматься над тем, какие другие задачи «тянет» за собой заданная задача. Это бывает нужно для облегчения своего труда. Зачем же решать много задач, если достаточно решить одну из них?

ОДИН ВОПРОС И ОТВЕТ НА НЕГО

У вдумчивого читателя нашей книжки, наверное, возник вопрос: если имеется достаточно общий метод решения задач, приводящих к нахождению экстремумов функции одной переменной величины, то зачем было рассматривать частные приемы? Что ж, такой вопрос вполне законен. В свое время и мы его задавали. Попытаемся же ответить на него.

Может быть, дело в желании автора возможно полней рассмотреть вопрос? Нет. За полнотой мы не гнались. Частные приемы решения задач на экстремумы мы рассмотрели далеко не все. Их много больше.

Может быть, автор увлекся историей вопроса? Тоже нет. Конечно, история развития теории экстремумов очень поучительна и интересна, но автор обращается к ней лишь от случая к случаю.

Но в чем же тогда дело?

На поставленный вопрос можно ответить словами большого мастера решения задач на экстремумы Якоба Штейнера (1796 — 1863). Штейнер говорил о двух методах решения таких задач: о синтетическом (с помощью частных приемов) и с помощью дифференциального исчисления (использование производной). Сравнивая два эти метода, он говорил, что они не исключают и не отталкивают друг друга, «оба необходимы для победы над огромными трудностями проблемы».

Якоб Штейнер

Согласимся же с тем, что надо знать и пользоваться как распространенными частными приемами, так и общими. Ведь задачи очень индивидуальны. Для одних из них применение общего метода (с помощью производной) может оказаться громоздким, в то время как частными приемами эти задачи могут быть решены удивительно просто и красиво. Для других, наоборот, общий прием может оказаться очень удобным.

В жизни почти всегда бывает так, что человек, владеющий разными инструментами (по своей профессии) и применяющий их в зависимости от характера выполняемой работы, добивается значительно лучших результатов, чем человек, владеющий лишь одним универсальным инструментом. Вычислитель, например, в одних случаях выполнит вычисление устно, в других—воспользуется листочком бумаги и карандашом, в-третьих—посчитает на счетах или счетной линейке, в-четвертых—воспользуется арифмометром, а может быть, и какой-нибудь более сложной счетной машиной. Если же вычисления окажутся очень трудоемкими, то придется воспользоваться и электронной счетной машиной. Так и нам применяемые методы решения задач надо соразмерять с индивидуальными особенностями решаемых задач.

Сказанное, конечно, не означает, что мы отвергаем общие методы. Нет, их нужно искать и разрабатывать с большой настойчивостью. Это одна из основных задач науки. Но нужно уметь пользоваться и частными приемами, которые часто ведут к цели легче и быстрее.

ЗАДАЧИ НА ЭКСТРЕМУМЫ

Постарайтесь решить предложенные ниже задачи. Они, наверное, заинтересуют вас. Большую часть этих задач мы позаимствовали из различных пособий по математике, а некоторые составили сами. Рекомендуем также некоторые из задач, решенных нами выше с помощью частных приемов, решить, пользуясь производной.

1. Доказать теорему об экстремуме квадратной функции с помощью производной.

2. Решить общую задачу об экстремуме функции третьей степени с помощью производной.

3. Из бревна цилиндрической формы, диаметр которого D, надо изготовить балку с прямоугольным поперечным сечением наибольшей площади. Какие размеры должно иметь поперечное сечение?

4. Какой формы должен быть прямоугольный участок земли данной площади, чтобы длина ограничивающей его изгороди была наименьшей.

5. Заготовлен материал для устройства изгороди длиною l *м*. Этой изгородью должна быть обнесена прямоугольная площадка, примыкающая к стене здания. Какой должна быть эта площадка, чтобы она имела наибольшую площадь?

6. В остроугольный треугольник с основанием a и высотой h_a нужно вписать прямоугольник наибольшей площади так, чтобы две вершины прямоугольника лежали на основании треугольника, а две другие по одной на боковых сторонах. Как это сделать?

7. Сооружается палатка конусообразной формы. Для этого используются шесты длиной l *м*. Какой высоты должна быть палатка, чтобы она была наиболее вместительной.

8. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 120 *км*, в направлениях, указанных стрелками (рис. 29), начинают одновременно двигаться мотоциклист со скоростью 30 *км/ч* и велосипедист со скоростью 10 *км/ч*. Когда расстояние между ними окажется наименьшим?

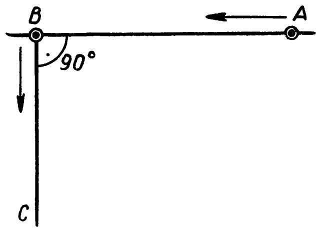


Рис. 29

9. Открытый сверху чан цилиндрической формы должен иметь емкость V. Какими должны быть размеры чана, чтобы на его изготовление пошло наименьшее количество материала?

10. Из трех прямоугольных кусков жести изготовляется закрытая цилиндрическая банка данной емкости. Каким должно быть отношение диаметра основания банки к ее высоте, чтобы используемые куски жести имели наименьшую площадь.

11. Чтобы уменьшить трение жидкости о стены и дно канала, нужно смачиваемую ею площадь сделать возможно малой. Требуется найти размеры открытого прямоугольного канала с заданной площадью сечения, при которых смачиваемая площадь будет наименьшей.

12. При истечении воды через отверстие в толстой стене (рис. 30) секундный расход воды вычисляется

по формуле $Q = cx\sqrt{h - x}$, где x — диаметр отверстия, h — глубина низшей точки отверстия, c — коэффициент пропорциональности. При каком значении x расход воды будет наибольшим?

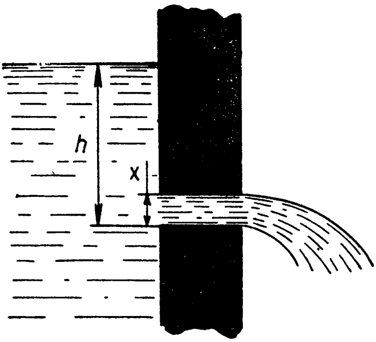


Рис. 30

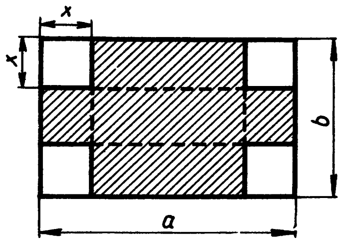


Рис. 31

13. Из прямоугольного листа жести требуется изготовить открытую сверху коробку. Для этого по углам листа вырезают равные квадраты и затем загибают получившиеся края (рис. 31). Какие квадраты нужно вырезать, чтобы получилась коробка наибольшей емкости?

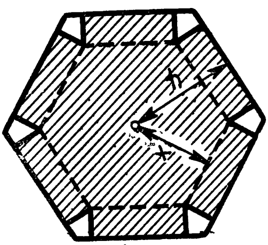


Рис 32

14. Из листа жести, имеющего форму правильного n-угольника (рис. 32), требуется сделать открытую сверху коробку наибольшей емкости, дном которой был бы правильный n-угольник. Как это сделать?

15. При n измерениях неизвестной величины x получены числа x_1, x_2, x_3, ..., x_k, ..., x_n. Требуется найти, при каком значении x сумма квадратов погрешностей $(x - x_k)$ будет наименьшей?

16. Рассмотрим химическую реакцию окисления окиси азота $2NO + O_2 = 2NO_2$. Скорость протекания этой реакции (при данной температуре) пропорциональна концентрации кислорода и квадрату концентрации окиси

азота в газовой смеси, где эта реакция протекает. (Предполагается, что концентрации выражаются в объемных процентах.) При какой концентрации кислорода скорость реакции будет наибольшей?

17. Из трех одинаковых досок шириной a *см* нужно сделать желоб, поперечное сечение которого имело бы форму трапеции (рис. 33). Как это сделать так, чтобы пропускная способность желоба была наибольшей (площадь поперечного сечения была бы наибольшей)?

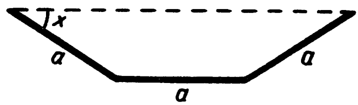


Рис 33

18. Сечение тоннеля представляет собой прямоугольник с примыкающим к нему полукругом (рис. 2). Площадь сечения должна быть равна S. Какими должны быть размеры сечения, чтобы периметр его был наименьшим?

19. Камень брошен с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. При каком угле α дальность полета камня будет наибольшей, если сопротивление воздуха не принимать в расчет?

20. Имеется гальванический элемент, внутреннее сопротивление которого равно r. При каком внешнем сопротивлении R мощность тока, получаемого от этого элемента во внешней цепи, будет наибольшей?

21. Страница книги имеет площадь S *см*^{2}. По техническим условиям ширина полей сверху и снизу текста должна быть равна a *см*, а слева и справа — b *см*. Каким должно быть отношение размеров страницы, чтобы площадь страницы, занятая текстом, была наибольшей?

22. На отрезке прямой линии, соединяющем два источника света, требуется найти наименее освещенную точку при условии, что оба источника имеют одну и ту же силу света. (А если сила источников света будет разной?)

Указание. Следует воспользоваться тем, что освещенность прямо пропорциональна силе источника света и обратно пропорциональна квадрату расстояния, на котором он находится.

23. Круговую площадку, радиус которой a *м*, намерены осветить одним светильником, подвешенным в центре ее (рис. 34). Какой должна быть высота подвеса светильника, чтобы освещенность границы площадки была наибольшей?

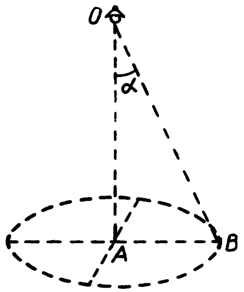


Рис. 34

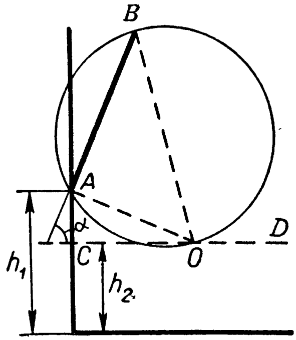


Рис. 35

24. На стене висит картина, ширина которой a единиц длины. Нижний край картины находится на высоте h_1 единиц длины от пола. Она повешена так, что со стеной образует угол α (рис. 35). На каком расстоянии от стены должен находиться зритель, чтобы он видел картину под наибольшим углом (наиболее отчетливо), если глаза зрителя находятся на высоте h_2 от пола?

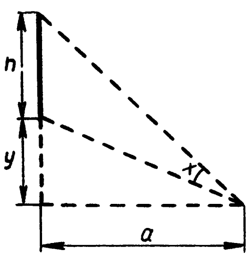


Рис 36

25. Зритель находится на расстоянии a *м* от плоскости экрана кинотеатра. Высота экрана h *м* (рис. 36). На какой высоте от уровня глаз зрителя должен находиться нижний край экрана, чтобы видимость была наилучшей (угол зрения был бы наибольшим)?

26. В стороне от железной дороги в пункте A находится склад леса (рис. 37). Этот лес должен доставляться на станцию B. С этой целью решили от пункта A до пункта C (на железной дороге) проложить прямолинейную автомобильную дорогу. Как нужно выбрать положение пункта C на железной дороге, чтобы провоз леса от A до B продолжался наименьшее время, если скорость движения по автомобильной дороге v_1 *км/ч*, а по железной дороге v_2 *км/ч* ($v_2 > v_1$)?

27. На станции B железной дороги BD расположен завод B. Продукция этого завода поставляется заводу A (рис. 37). Ближайшей от A точкой железной дороги является D. Расстояния BD и AD равны соответственно a *км* и b *км*. Необходимо завод A связать шоссейной дорогой (прямолинейной) с железной дорогой. Спроектировать это шоссе нужно так, чтобы провоз груза из B в A по маршруту BCA был наиболее дешевым. Проектировщику было сообщено, что стоимость провоза единицы груза на расстояние в 1 *км* по железной дороге равна α копеек, а по шоссе — β копеек. Где должно находиться начало шоссе C?

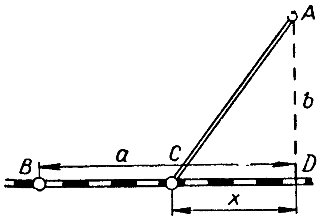


Рис. 37

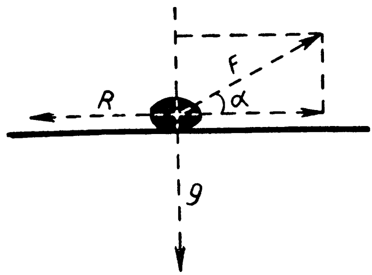


Рис. 38

28. Камень, весящий 9 *кг*, лежит на деревянном полу (горизонтальном) (рис. 38). Его нужно переместить по этому полу. Под каким углом (к горизонту) нужно приложить к этому камню силу, чтобы сдвинуть его и чтобы для этого потребовалась наименьшая сила? (По закону Кулона трение пропорционально силе, равной по величине силе, прижимающей тело к плоскости и направленной в сторону, противоположную движению. Коэффициент пропорциональности в данном случае можно считать равным 0,4.)

29. Опытным путем установлено, что стоимость плавания некоторого судна в течение часа может быть выражена формулой $a+bv^3$, где a и b — особые коэффициенты, вычисляемые для каждого судна и зависящие от особенностей его. При какой скорости v этого судна (в узлах, 1 узел = 1,85 *км/ч*) расходы на плавание будут наименьшими?

30. Проектируется канал. Поперечное сечение его должно иметь форму равнобедренной трапеции, площадь которой должна быть равна S, а высота h. Проектировщику нужно определить размеры канала так, чтобы при течении воды по каналу потери на трение о дно и стенки были наименьшими. Какими должны быть размеры канала?

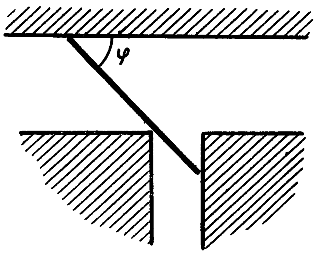


Рис. 39

31. От канала шириной 4 *м* под прямым углом к нему отходит другой канал шириной 2 *м* (рис. 39). Какой может быть длина бревна, чтобы его можно было сплавить по этим каналам из одного в другой (толщину бревна можно не учитывать)?

32. Имеется наклонная плоскость, длина основания которой равна a *см* (рис. 40). Длину самой наклонной плоскости l *см*, а значит, и угол наклона ее α можно изменять. По этой плоскости свободно скатывается шар. Каким должен быть угол наклона плоскости α, чтобы время скатывания шара было наименьшим?

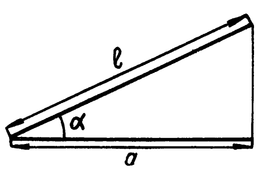


Рис 40

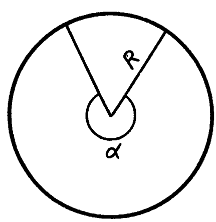


Рис 41

33. Из кружка фильтровальной бумаги нужно вырезать сектор (рис. 41) и свернуть его в конусообразный фильтр. Какой сектор нужно вырезать, чтобы из него получился фильтр наибольшей емкости?

34. Дана плоская фигура, ограниченная параболой $y = x^2$ и прямой $y = H$ (рис. 42). Требуется вписать в нее прямоугольник наибольшей площади (верхнее основание прямоугольника должно лежать на прямой $y = H$).

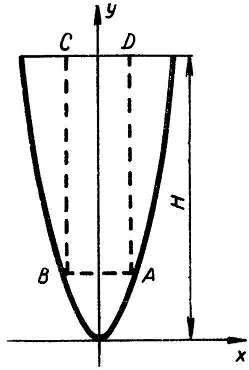


Рис. 42

35. Вокруг полушара, радиус которого r, требуется описать круговой конус наименьшего объема так, чтобы основание полушара и основание конуса лежали в одной плоскости и имели один центр.

36. В данный прямой круговой конус вписать цилиндр наибольшего объема.

37. Вписать в данный шар радиуса r цилиндр с наибольшей боковой поверхностью.

38. В данный равнобедренный треугольник вписать прямоугольник наибольшей площади.

ОЧЕНЬ КРАТКО ОБ ЭКСТРЕМУМАХ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Выше мы говорили об экстремумах функций одной переменной величины. Это наиболее простые экстремумы. Но большое число задач и не менее важных требует для своего решения нахождения экстремумов функций нескольких переменных. Вообще задачи на экстремумы функций нескольких переменных решаются сложно, и тем сложнее, чем больше переменных. Основные приемы решения указанных задач рассматриваются в математическом анализе. В нашей книжке эти приемы, в виду их большой сложности, мы не можем рассматривать. Мы покажем лишь, что некоторые задачи на экстремумы функций двух и бóльшего числа переменных могут быть решены элементарно, с помощью некоторых рассмотренных выше приемов. Вот одна из таких задач.

Из листа жести, площадь которого 2 а, надо сделать закрытую коробку в форме параллелепипеда (прямоугольного), имеющую наибольший объем. Какими должны быть размеры ее?

Решение этой задачи приводит к разысканию максимума функции трех независимых переменных $v = xyz$, при условии, что $2xy + 2xz + 2yz = 2a$, или $xy + xz + yz = a$. Это условие является математической записью того, что весь лист должен быть использован, то есть площадь всех граней коробки должна быть равна площади листа.

Отличительной особенностью этой задачи о коробке является то, что для решения ее нужно найти не просто максимум некоторой функции трех переменных, а максимум при определенных условиях. Такие экстремумы называются у с л о в н ы м и.

Решение задачи: искомая функция $v = xyz$ (положительная) будет иметь максимум, если максимум будет иметь квадрат ее, то есть $v^2 = x^2y^2z^2$. Но $x^2y^2z^2 = (xy)(xz)(yz)$, а сумма множителей xy, xz и yz равна a (по условию).

Поэтому на основании того, что нам известно о максимуме произведения, при условии постоянства суммы множителей его, находим, что объем коробки будет наибольшим при $xy = \frac{a}{3}$, $xz = \frac{a}{3}$, $yz = \frac{a}{3}$, то есть при $x = y = z = \sqrt{\frac{a}{3}}$.

ПОНЯТИЕ О ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ

Дальнейшим развитием задач на экстремумы функций можно считать вариационные задачи.

Исторически первой вариационной задачей, возбудившей к себе большой интерес, была задача о брахистохроне. Поставил эту задачу известный швейцарский математик Иоганн Бернулли (1667 — 1748). Это было в 1696 году. Вот эта задача.

Пусть A и B — две точки. Будем считать, что A находится выше B и что они не лежат на одной вертикальной прямой. Требуется из всех возможных путей, соединяющих A и B, найти такой, по которому материальная точка скатится из A в B (под действием силы тяжести) в кратчайший срок.

Кривая, по которой точка будет скатываться в кратчайший срок, и называется б р а х и с т о х р о н о й.

Иоганн Бернулли

Исаак Ньютон

Задача о брахистохроне привлекла к себе всеобщее внимание. Многие математики занялись поисками ее решения. Удалось решить ее нескольким крупнейшим математикам того времени. Ее решил сам Иоганн Бернулли, а также Якоб Бернулли, Исаак Ньютон и Гийом Франсуа Лопиталь.

Рассказывают, что когда Иоганн Бернулли познакомился с одним из решений задач о брахистохроне, то он сказал: «Узнаю льва по когтям». Это решение действительно было дано львом в математике — Исааком Ньютоном.

Брахистохроной оказалась циклоида, лежащая в вертикальной плоскости, проходящей через точки A и B (рис. 43)[1].

Циклоида получается следующим образом. Представим себе круг радиуса r, касающийся оси x-ов в начале координат. Если отметить на окружности круга эту точку касания и круг толкнуть так, чтобы он покатился без сколь-

[1] Решение задачи о брахистохроне сложно, и в нашей книжке мы не можем рассмотреть его.

жения по оси x-ов, то отмеченная точка касания и опишет циклоиду (рис. 44).

Чтобы получить брахистохрону, нужно построить кривую, симметричную циклоиде относительно оси x-ов (или ось y-ов при построении циклоиды направить вниз).

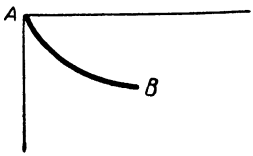


Рис. 43

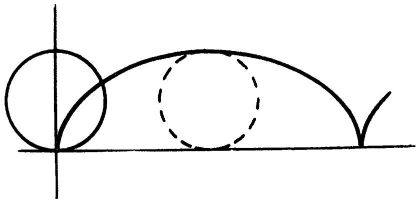


Рис. 44

Задача о брахистохроне сыграла важную роль в развитии одной из математических наук—вариационного исчисления[1].

Перейдем к рассмотрению некоторых посильных для читателей нашей книжки вариационных задач.

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Частным случаем вариационных задач являются изопериметрические задачи. Рассмотрим некоторые из них.

1. Какой из всех треугольников с данным периметром $2p$ имеет наибольшую площадь?

Обозначим стороны искомого треугольника через a, b, c. Площадь треугольника, выражаемая формулой $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, будет наибольшей, если

[1] Основное содержание вариационного исчисления — решение вариационных задач. Вариационная задача — это задача, для решения которой приходится находить экстремумы функционалов. Говорят, что задан функционал, если каждой функции (или кривой) из некоторого определенного множества их поставлено в соответствие определенное действительное число. Функционал можно рассматривать как такое обобщение понятия функции, когда значениями аргумента служат не числа, а функции (или кривые линии). Так, функционалом можно считать длину плоской кривой, потому что каждой кривой (имеющей длину) приводится в соответствие неотрицательное число, называемое длиной ее. Функционалом можно также считать время, которое потребуется телу, движущемуся по плоской кривой, соединяющей две данные точки A и B, для того чтобы пройти весь этот путь с переменной скоростью, зависящей от положения движущегося тела.

наибольшим будет произведение $(p-a)(p-b)(p-c)$. Но сумма множителей этого произведения равна $(p-a)+(p-b)+(p-c)=3p-(a+b+c)=3p-2p=p$, то есть постоянна. Поэтому произведение $(p-a)(p-b)(p-c)$ будет наибольшим при условии $(p-a)=(p-b)=(p-c)$, или $a=b=c=\frac{2}{3}p$. Значит, наибольшую площадь из всех треугольников с данным периметром имеет равносторонний.

2. Какой из всех прямоугольников с данным периметром $2p$ имеет наибольшую площадь?

Эта задача уже была решена (стр. 8—10).

3. Сложнее решается следующая задача. *Выделить из всех четырехугольников с данным периметром такой, который имел бы наибольшую площадь.*

Оказывается, что таким четырехугольником будет также квадрат. Попытайтесь решить эту задачу самостоятельно (смотреть ниже задачи **39** и **40**, стр. 61).

4. Знаменитая изопериметрическая задача.

Требуется среди всех замкнутых плоских кривых линий, имеющих данную длину, найти такую, которая ограничивала бы наибольшую площадь.

Эта задача давно привлекала к себе внимание математиков. Решением ее занимались многие, но, пожалуй, больше всех думал над этой задачей Якоб Штейнер. Он дал ей пять решений. Одно из этих решений, считавшееся самим Штейнером особенно изящным, мы и изложим здесь.

В начале Штейнер показывает, что существует бесконечно много плоских фигур с данным периметром, но разных по форме и с различными площадями. Затем он устанавливает, что среди всевозможных фигур данного периметра имеются фигуры со сколь угодно малой площадью. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть, например, прямоугольники с периметром P. Пусть высота одного из таких прямоугольников h. Тогда площадь его будет равна $h\frac{P-2h}{2}$, то есть будет меньше $\frac{hP}{2}$. Но h можно взять достаточно малой, и тогда $\frac{hP}{2}$ окажется меньше любого как угодно малого, наперед заданного положительного числа. Столь же легко показывает далее Штейнер, что площадь фигуры с данным периметром P не может быть как угодно большой. В самом деле, если из какой-нибудь точки контура фигуры, как из центра, описать окружность радиусом $\frac{P}{2}$, то вся фигура будет лежать внутри этой окружности, так как расстояние между двумя любыми точками фигуры, периметр которой P, не может быть больше $\frac{P}{2}$ (рис. 45). Далее будем исходить из предположения, что среди всех этих фигур, имеющих данный пери-

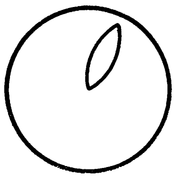


Рис. 45

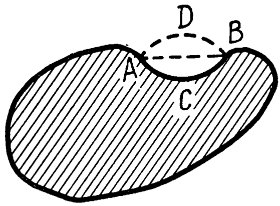


Рис. 46

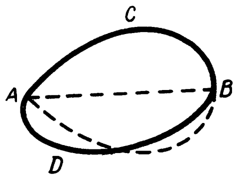


Рис. 47

метр P, действительно существует такая, площадь которой будет наибольшей. Тогда «гениально простые умозаключения» Штейнера (как их называет Д. А. Крыжановский) приводят к выводу, что такой фигурой является круг.

а) Легко установить, что искомая фигура должна быть всюду выпуклой, то есть всякая хорда ее должна лежать внутри этой фигуры. Пусть, например, хорда AB фигуры, имеющей периметр P, лежит вне этой фигуры (рис. 46). Тогда можно заменить стягиваемую хордой AB дугу ACB симметричной ей относительно этой хорды дугой ADB. Периметр фигуры от такой замены не изменится, а площадь увеличится. Значит, фигура с внешней хордой не может иметь наибольшей площади.

б) Столь же просто можно показать, что любая хорда искомой фигуры, делящая ее периметр пополам, обязательно должна делить пополам и площадь этой фигуры. В самом деле, пусть, например, хорда AB делит периметр фигуры пополам, то есть длина $\smile ACB$ равна длине $\smile ADB$, но площади двух получившихся частей оказываются разными (рис. 47). Пусть, для определенности, площадь ACB больше площади ADB.

Построим новую фигуру, дополнив часть ACB симметричной относительно AB частью AEB. Получившаяся фигура будет иметь данный периметр, но площадь ее будет больше площади исходной фигуры. Значит, искомая фигура должна быть такой, чтобы любая хорда, делящая пополам ее периметр, делила бы пополам и площадь ее. Такую хорду можно называть диаметром фигуры.

в) Докажем далее, что любой диаметр искомой фигуры должен быть виден из всех точек контура ее под прямым углом. В этом месте рассуждений Штейнер пользуется следующей леммой:

Из всех треугольников с двумя данными сторонами наибольшую площадь имеет тот, у которого эти две стороны взаимно перпендикулряны.

Эту лемму мы предусмотрительно уже доказали (стр. 23). Воспользоваться ею можно так. Пусть, например, некоторый диаметр AB фигуры, имеющей периметр P (рис. 48), из

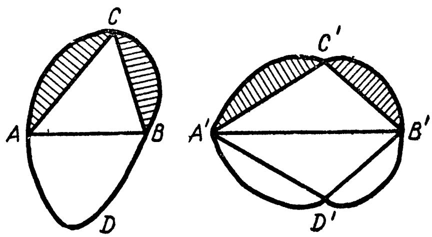


Рис. 48

некоторой точки C ее контура виден не под прямым углом, то есть $\angle ACB \neq 90°$. Будем считать эту фигуру удовлетворяющей первым двум условиям. Тогда можно будет сдвинуть или раздвинуть сегменты фигуры, отсекаемые хордами AC и CB так, чтобы угол $A'C'B'$ стал прямым (при этом изменится AB). На основании леммы фигура $A'C'B'$ будет иметь бо́льшую площадь, чем фигура ACB ($S_{\triangle ACB} < S_{\triangle A'B'C'}$). Поэтому если дополнить фигуру $A'B'C'$ симметричной ей относительно оси $A'B'$ фигурой $A'D'B'$, то получится фигура с тем же периметром, что и данная, но площадь ее будет уже больше. Следовательно, любой диаметр искомой фигуры должен быть виден из всех точек контура ее под прямым углом.

Последнее условие приводит к выводу, что искомой фигурой является круг, так как этому условию удовлетворяет круг.

В ходе наших рассуждений осталось недоказанным одно утверждение, на которое мы опирались. Речь идет о предположении, что искомая фигура (имеющая данный периметр P и наибольшую площадь) существует. Сам Штейнер этот недостаток своего простого и изящного доказательства не устранил. Это было сделано позднее другими математиками. В нашей книжке об этих дополнениях доказательства Штейнера мы говорить не будем, так как они по своей сложности и громоздкости превосходят уровень нашего изложения[1].

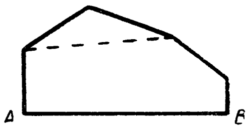


Рис. 49

Мы здесь лишь подчеркнем, что при рассмотрении экстремумов доказательства существования их очень важны. Ведь разговор об экстремуме не имеет оснований, если этот экстремум не существует. То, чего нет, не найдешь! Приведем простой пример.

Возьмем на плоскости две точки A и B и соединим их отрезком. Будем рассматривать всевозможные ломаные линии, соединяющие точки A и B, удовлетворяющие следующему требованию: первое и последнее звенья их должны быть перпендикулярны отрезку AB (рис. 49).

Ясно, что, какую бы из этих ломаных линий мы ни взяли, всегда можно получить такого же вида ломаную, которая будет короче. Для этого достаточно, например, два соседних звена заменить одним звеном. Ясно также, что длина любой из этих ломаных больше длины отрезка AB. Все это убеждает в том, что ломаной линии заданного вида и имеющей наименьшую длину не существует.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ, ВЗАИМНЫЕ ПО ОТНОШЕНИЮ К ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИМ

Представляют интерес задачи как бы взаимные по отношению к изопериметрическим задачам. «Главной» изопериметрической задаче, например, взаимной будет такая задача: *Какая из всех плоских фигур с данной площадью имеет наименьший периметр?* Взаимными по отношению к соответствующим изопериметрическим задачам будут

[1] Читатель, пожелавший углубиться в эти вопросы (что мы ему рекомендуем), может обратиться к книге Д. А. Крыжановского «Изопериметры». (Физматгиз, 1959).

и такие задачи: 1) *Какой из всех треугольников с данной площадью имеет наименьший периметр?* 2) *Какой из всех четырехугольников с данной площадью имеет наименьший периметр?*

Решение каждой из этих задач сводится к соответствующей изопериметрической задаче. Как это делается,

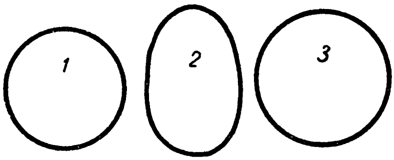


Рис. 50

покажем на задаче, взаимной по отношению к «главной» изопериметрической задаче. Докажем, что из всех плоских фигур с данной площадью S наименьший периметр имеет круг.

Пусть круг *1* (рис. 50) имеет данную площадь S и периметр P. Предположим, что найдется такая фигура *2* (отличная от круга), площадь которой будет S, а периметр P_1, где P_1 меньше P. Тогда по соответствующей изопериметрической задаче найдется круг *3*, имеющий тот же периметр P_1, что и фигура *2*, но площадь, превосходящую S. Периметр этого круга, имеющего площадь большую, чем S, должен быть больше периметра исходного круга, то есть $P_1 > P$. Мы пришли к противоречию. Следовательно, не существует такой фигуры, площадь которой будет равна S, а периметр будет меньше периметра круга с площадью S.

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ
(для самостоятельного решения)

39. Доказать, что из всех треугольников с равными основаниями и равными суммами боковых сторон наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

40. Доказать, что из всех четырехугольников с данным периметром P наибольшую площадь имеет квадрат.

41. Доказать, что из всех фигур, ограниченных кривой линией ACB данной длины l и отрезком AB (длина которого может изменяться), соединяющим начало и конец этой кривой, наибольшую площадь имеет полукруг, дуга которого имеет длину l.

42. Доказать, что из всех фигур, ограниченных прямолинейным отрезком AB, длина которого l, и кривой линией ACB длиной L, наибольшую площадь имеет сегмент круга, ограниченный хордой AB и дугой ACB данной длины L.

43. Задача Крамера[1]. Доказать, что из всех многоугольников с данными сторонами $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ наибольшую площадь имеет тот, около которого может быть описана окружность.

Эту задачу иногда называют задачей о шарнирном многоугольнике. Действительно, можно представить себе многоугольник, составленный из планок длиной $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, скрепленных между собой шарнирно в виде многоугольника. Этому шарнирному многоугольнику можно придавать различную форму. Когда же площадь его будет наибольшей? При решении задачи о шарнирном многоугольнике можно опираться на то, что всегда существует многоугольник с данными сторонами $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, вписанный в некоторую окружность, если, конечно, каждая из этих сторон меньше суммы остальных[2].

44 и 45. Для задач **41** и **42** сформулировать и решить взаимные задачи.

МИНИМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ И МЫЛЬНЫЕ ПЛЕНКИ

Немалый интерес представляют задачи на минимальные поверхности. Большой известностью пользуется, например, проблема Плато. Суть ее состоит в следующем. Задается пространственная замкнутая линия. Требуется найти поверхность наименьшей площади, ограниченную этой линией. Математическое решение этой проблемы очень сложно. Зато очень просто опытное решение ее. Читатель, наверное, уже догадался, что нужно использовать мыльные пленки. Догадка правильная. Действительно, мыльная пленка, «на-

---

[1] Габриель Крамер (1704—1752) — швейцарский математик. Широкую известность получило предложенное им правило решения системы линейных уравнений с помощью определителей.

[2] С доказательством существования такого многоугольника читатель может ознакомиться по книге Д. А. Крыжановского «Изопериметры».

тянутая» на контур, стремится занять положение устойчивого равновесия. Положение же устойчивого равновесия характерно как раз тем, что площадь пленки оказывается наименьшей.

Контуры для образования пленок рекомендуется делать из латунной проволоки. Размеры этих контуров могут быть не более 8—10 *см*. Формы их следует разнообразить. Они могут быть, например, каркасами куба, тетраэдра и т. д. Для получения интересующей поверхности контур из проволоки нужно погрузить в подготовленный мыльный раствор и вынуть из него. Будут получаться очень красивые поверхности мыльных пленок. При желании отдельные части этих поверхностей могут уничтожаться протыканием их.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О ПОВЕРХНОСТЯХ И ОБЪЕМАХ

Как мы видели, вопросы об изопериметрах разнообразны и очень интересны. Решение их требует большой сообразительности и не может не увлечь каждого, кто любит думать. Не меньший интерес представляют аналогичные вопросы о поверхностях тел и объемах. Этими вопросами, как и изопериметрами, много занимался Штейнер. Занимались ими и другие математики. Здесь эти вопросы мы разбирать не будем. Перечислим только некоторые интересные выводы.

1. ***Из всех призм с заданной высотой и одним и тем же основанием наименьшую поверхность (боковую и полную) имеет прямая призма.***

Этот вывод легко распространяется на цилиндры (не только круговые).

2. ***Из всех призм с равновеликими основаниями и равными высотами наибольшую (боковую и полную) поверхность имеет прямая правильная призма.***

3. ***Из двух прямых правильных призм, имеющих равновеликие основания и равные высоты, меньшую поверхность (боковую и полную) имеет та, у которой число боковых граней больше.***

На основании этого результата легко выводится следующий:

Прямой круговой цилиндр с данной площадью основания и данной высотой имеет наименьшую (полную и боковую) поверхность по сравнению с любой призмой с такими же площадями оснований и высотами.

4. ***Из всех тетраэдров с одной и той же поверхностью наибольший объем имеет правильный тетраэдр.***

5. ***Из всех параллелепипедов с одной и той же полной поверхностью наибольший объем имеет куб.***

6. ***Из всех призматических и цилиндрических тел с данной полной поверхностью наибольший объем имеет прямой круговой цилиндр, диаметр основания которого равен высоте.***

7. ***Наибольший объем из всех тел с заданной поверхностью имеет шар.***

Как и в случае изопериметров, верны выводы, взаимные по отношению к перечисленным.

Рассматривать подробно эти выводы и взаимные по отношению к ним нет особой нужды. Музыкант на нашем месте сказал бы, что тема уже хорошо прозвучала и развивать ее дальше — это значит ослаблять впечатление от нее.

Читателю, заинтересовавшемуся этими вопросами, можно порекомендовать попытаться продлить доставленное изопериметрами удовольствие и поискать обоснования для перечисленных выводов.

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ

Пусть дана некоторая поверхность и на ней две точки A и B. Требуется найти линию, лежащую на этой поверхности, соединяющую данные точки и имеющую наименьшую длину. Такая линия называется г е о д е з и ч е с к о й.

Простейший пример геодезической линии — это прямая линия на плоскости. Действительно, отрезок прямой, соединяющий две данные точки плоскости, имеет наименьшую длину по сравнению с длиной любой другой линии, соединяющей эти две точки. Такое утверждение для нас очевидно. Один из наших учителей — профессор П. Д. Белоновский любил по этому поводу повторять, что это очевидно и для многих животных. «Лисица, — говорил он,— гонится за зайцем по прямой линии. И даже амеба настигает инфузорию по кратчайшему прямолинейному пути».

Усложнением рассмотренного можно считать случай многогранной поверхности, составленной из кусков плоскостей, ограниченных ломаными линиями (многоугольников). Хорошо известны, например, задачи о мухах или пауках. Пусть муха находится в точке M, лежащей на поверхности прямоугольного параллелепипеда, и почему-либо, например спасаясь от паука, пожелала перебраться в точку L этой поверхности (рис. 51). Какой путь будет для мухи кратчайшим? Мы легко можем помочь мухе решить эту задачу. Нам нужно будет только посоветовать ей развернуть грани AA_1D_1D и DD_1C_1C на плоскость и прочертить отрезок ML. Тем самым определится положение точки K. Если эти грани привести снова в первоначальное положение, то путь MKL и будет кратчайшим.

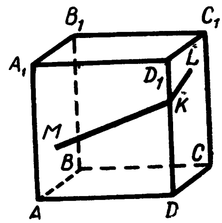


Рис. 51

Более сложным делом будет найти кратчайший путь для мухи, если точки M и L совпадут с вершинами A и C_1 (рис. 51). В этом случае нужно будет сравнить несколько путей, учитывая длины ребер параллелепипеда.

46. Рекомендуем произвести расчеты и указать мухе, как ей нужно ползти, если размеры параллелепипеда таковы: $AD = 3$ *дм*, $AB = 2$ *дм* и $AA_1 = 4$ *дм*.

Этим же приемом развертки на плоскость нужных граней можно пользоваться и при решении задач на кратчайшие пути по поверхностям призм. Отметим, пользуясь случаем, характерную особенность кратчайшего пути по боковой поверхности призмы, состоящую в том, что звенья этого пути образуют со всеми встречными ребрами равные углы.

Обратимся к кратчайшим путям по поверхности пирамиды. Для большей простоты ограничимся случаем, когда точки M и N берутся на боковой поверхности правильной пятиугольной пирамиды, сторона основания которой равна 4 *дм*, а боковое ребро — 8 *дм*. Пусть точки M и N располагаются соответственно на ребрах AS и CS, причем $AM = \frac{1}{2} AS$, а $CN = \frac{1}{3} CS$ (рис. 52). Кратчайший путь из M в N найдем графическим способом. Для этого развернем грани ASB и BSC на плоскость, отметим положения точек M и N и построим отрезок MN. Измерив его и учтя масштаб чертежа, найдем, что длина кратчайшего пути из M в N по боковой поверхности пирамиды равна 4,7 *дм*

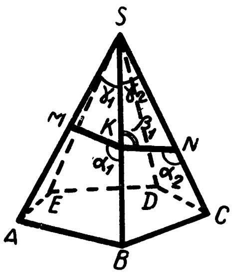


Рис. 52

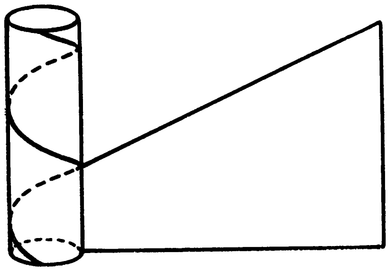


Рис. 53

Стоит отметить, что звенья ломаной MK пересекают боковые ребра под такими углами, для которых выполняются следующие равенства: $\alpha_1 = \beta_1$ и $\beta_1 + \gamma_2 = \alpha_2$, откуда следует равенство $\alpha_2 - \alpha_1 = \gamma_2$.

Ну а каким будет кратчайший путь по поверхности кругового цилиндра?

Для ответа на поставленный вопрос придется предварительно познакомиться с одной замечательной кривой. Её мы много раз видели, много раз пользовались ею, но пристально к ней не присматривались. Эта замечательная кривая называется винтовой линией. Представление о ней мы получим, если на поверхность цилиндра навернем прямоугольный треугольник (рис. 53) так, чтобы нижний катет его навивался на окружность основания. Гипотенуза этого треугольника, навернутого на цилиндр, и образует винтовую линию. Типичной особенностью винтовой линии является то, что она пересекает все образующие цилиндра под одним и тем же углом.

Две точки M и N на цилиндрической (круговой) поверхности могут занимать следующие положения: 1) они могут лежать на одной образующей, 2) на окружности сечения, перпендикулярного оси цилиндра (поперечного сечения), и 3) на разных образующих и разных окружностях сечений, перпендикулярных оси цилиндра. В первом случае кратчайшим путем между точками M и N будет отрезок образующей, соединяющий эти точки. Во втором случае таким путем будет меньшая дуга окружности поперечного сечения, концами которой служат точки M и N, а если эти дуги равны, то — любая из них. В третьем случае кратчайшим путем будет винтовая линия, соединяющая точки M и N и делающая менее половины оборота. Чтобы убедиться в верности сказанного, достаточно представить себе развертку цилиндрической поверхности (рис. 54).

47. Возьмите круговой цилиндр и отметьте на поверхности его две точки M и N. Как построить кратчайший путь из M в N по поверхности этого цилиндра?

Перейдем к геодезическим линиям на к о н и ч е с к о й п о в е р х н о с т и. И здесь придется рассмотреть три случая: 1) точки M и N могут лежать на одной образующей, 2) они могут лежать на окружности сечения, перпендикулярного оси конуса (поперечного сечения), и 3) M и N не лежат на одной образующей и на одной окружности поперечного сечения (рис. 55). В каждом из этих случаев найти кратчайший путь не представляет особого труда. Для этого развернем коническую поверхность на плоскость и соединим точки M и N отрезками прямой.

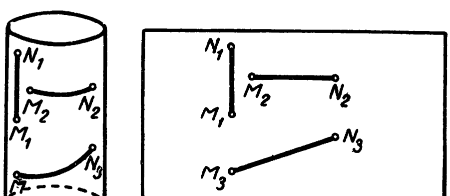


Рис. 54

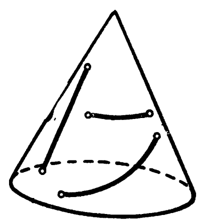


Рис. 53

Если сейчас свернуть сектор в коническую поверхность, то эти отрезки прямой превратятся в кратчайшие пути по поверхности конуса. В первом случае кратчайшим путем будет отрезок MN образующей. Ну а во втором случае? Может показаться, что если точки M и N лежат на окружности поперечного сечения, то кратчайшим путем будет меньшая дуга MN этой окружности. Но это не так, и убедиться в этом легко. Если бы кратчайшим путем была меньшая дуга MN окружности поперечного сечения, то на развертке конической поверхности эта дуга должна была бы превратиться в отрезок прямой линии. Между тем она переходит в дугу окружности с центром в вершине угла развертки.

Для конической поверхности второй и третий случаи существенно не отличаются друг от друга. Кратчайшими путями будут дуги кривых линий, лежащие на конической поверхности и переходящие в отрезки прямых линий при развертывании конической поверхности на плоскость.

48. Возьмите на модели конуса (на конической поверхности) две точки M и N и постройте на ней несколько точек кратчайшего пути от M к N по поверхности конуса.

Нам остается найти ответ на вопрос о кратчайшей линии на поверхности шара (на сфере). Сделать это не легко, так как примененный нами в случаях многогранной, цилиндрической и конической поверхностей прием развертывания их на плоскость здесь непригоден. Нельзя же сферу развернуть на плоскость. Но тогда как же быть?

Довольно часто математику помогает аналогия. Может быть, и в данном случае следует воспользоваться ею? А не стоит ли обратиться к доказательству того, что кратчайший путь между двумя точками M и N на плоскости — это соединяющий их отрезок прямой линии? Там приходится доказывать, что ломаная линия длиннее отрезка MN. Здесь вместо отрезка MN нужно взять меньшую дугу MN окружности большого круга сферы (проходящего через точки M, N и центр сферы). Роль ломаной здесь может играть линия, составленная из дуг больших кругов сферы (с началом в точке M и концом в N). Там в ходе доказательства приходится пользоваться тем, что любая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон. А нельзя ли здесь такую же теорему доказать для сферического треугольника, чтобы затем можно было доказать и теорему о «ломаной» на сфере?

Возьмем на сфере три точки A, B и C и соединим их дугами больших кругов. Эти дуги образуют сферический треугольник (рис. 56). Докажем же, что каждая сторона сферического треугольника меньше суммы двух других его сторон. Плоскости больших кругов, содержащих дуги AC,

CB и BA, образуют трехгранный угол с вершиной O и плоскими углами AOB, BOC и COA. В трехгранном же угле, как известно, каждый плоский угол меньше суммы двух других плоских углов. Но центральные углы AOB, BOC и COA пропорциональны дугам AB, BC и CA. Поэтому каждая из сторон сферического треугольника AB, BC и CA меньше суммы двух других сторон его. Требуемое доказано. Возьмем на сфере $n+1$ точек A_0, A_1, A_2, ..., A_n и соединим их последовательно дугами больших кругов. Эти дуги и составят сферическую ломаную линию $A_0A_1A_2 \ldots A_n$. Докажем, что дуга MN (меньшая) окружности большого круга на сфере короче любой сферической ломаной линии, соединяющей точки M и N. Это можно сделать также по аналогии с доказательством соответствующей теоремы для плоскости. Действительно, пусть сферическая ломаная $MA_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}N$ состоит из n дуг больших кругов. Заменим первую пару дуг MA_1–и A_1A_2 одной дугой MA_2. Получится сферическая ломаная $MA_2A_3 \ldots A_{n-1}N$, состоящая уже из $n-1$ дуг, сумма длин которых будет меньше длины первоначальной сферической ломаной линии, так как сумма дуг MA_1 и A_1A_2 заменена одной дугой MA_2[1]. Заменим далее дуги MA_2 и A_2A_3 одной дугой MA_3. Получится сферическая ломаная линия, еще более короткая. Продолжая этот процесс, мы придем к сферической ломаной, состоящей из двух дуг MA_{n-1} и $A_{n-1}N$. Сумма длин их больше длины дуги MN_{n-1}. Из всего этого и следует, что дуга MN короче любой сферической ломаной, соединяющей точки M и N. Такова схема доказательства. (Проведение его могло осложниться, если бы некоторые пары дуг, заменяемые одной дугой, лежали на одной окружности большого круга или точки M и N были бы концами одного диаметра сферы.)

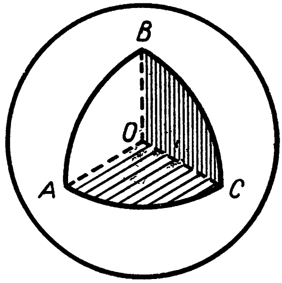


Рис. 56

А что же дальше? Как и в случае аналогичной теоремы для плоскости далее следует сравнить длины любых линий, лежащих на сфере и имеющих своими концами

---

[1] Если точки M, A_1 и A_2 лежат на одной дуге большого круга, то возможно и равенство $MA_1 + A_1A_2 = MA_2$.

точки M и N, с дугой MN большого круга. И здесь полезна аналогия. Для сферы за длину кривой можно принять предел длин сферических ломаных линий, «вписанных» в эту кривую, находимый при условии, что длина каждой дуги этой ломаной стремится к 0. Но перед этим мы установили, что длина любой сферической ломаной линии, соединяющей точки M и N, не меньше длины дуги большого круга MN. А, как известно из теории пределов, в этом случае предел длин сферических ломаных линий, то есть длина сферической кривой MN, не может оказаться меньше длины дуги MN. Такова схема завершающих рассуждений.

Итак, из всех сферических кривых, соединяющих точки M и N сферы, кратчайшей будет дуга MN большого круга. Вот и все по вопросу о геодезических кривых[1].

Вариационные задачи очень разнообразны. Но мы вынуждены ограничиться рассмотренными нами.

КРАТЧАЙШИЕ СЕТИ

Для проектировщиков линий связи, транспортных линий, разного рода сетей, например водопроводных и электрических, большое значение имеет следующая задача.

На плоскости даны n точек. Требуется все их связать такой сетью отрезков, длина которой была бы наименьшей.

У читателя при ознакомлении с кратким условием этой задачи, наверное, возникнут вопросы. Может быть, он спросит: «Как надо представлять себе ту сеть, о которой говорится в задаче?» Ответим на этот вопрос. Сеть должна быть такой, чтобы из любой данной точки можно было пройти в любую другую по ломаной линии, состоящей из отрезков этой сети.

Читатель может спросить также: «А что надо понимать под длиной сети?» Ответим и на этот вопрос. Длина сети — это сумма длин всех отрезков ее.

Наверное, наши ответы удовлетворят читателя, и он попытается решить предложенную задачу самостоятельно. Вероятно, сначала читатель попробует построить кратчайшую сеть для двух точек, затем для трех, потом, может

[1] Читатель, желающий более основательно познакомиться с геодезическими кривыми, может обратиться к книге Л. А. Люстерника «Кратчайшие линии» (Изд-во технико-теоретической литературы, 1955).

быть, для четырех, а далее попытается разобраться и в общем случае.

Пока все это делает читатель, мы тоже не будем сидеть без дела и для оказания первой помощи читателю построим пример кратчайшей сети. Возьмем, например, на карте семь городов и построим соединяющую их кратчайшую телефонную сеть (рис. 57). Пусть читатель рассмотрит ее.

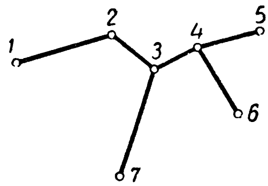


Рис. 57

Очень может быть, что читатель предложенную ему задачу в общем случае не сможет решить. Придется помочь ему.

Для этого попытаемся установить некоторые **свойства кратчайших сетей**. Договоримся сначала о терминологии. Данные точки будем называть **вершинами сети**. Ближайшей **соседкой** данной вершины назовем такую вершину, которая находится от данной вершины на наименьшем расстоянии. **Фрагментом сети** будем называть вершины (вместе со связывающими их отрезками), которые в ходе построения сети уже оказались связанными. Договоримся еще о том, что под **расстоянием от вершины до фрагмента** (и наоборот) будем понимать наименьшее из расстояний этой вершины от каждой вершины данного фрагмента и в связи с этим ближайшей соседкой фрагмента будем называть вершину, находящуюся от данного фрагмента на наименьшем расстоянии. Для конкретизации этих понятий читатель может обратиться к заготовленному нами примеру кратчайшей сети (рис. 57).

Какие же свойства кратчайших сетей привлекают наше внимание?

1. *Каждая вершина кратчайшей сети непосредственно связана с ближайшей соседкой (или одной из них, если ближайших соседок не одна).*

Для упрощения рассуждений будем предполагать, что все расстояния между вершинами различны.

Пусть для данных n вершин существует кратчайшая сеть, не обладающая рассматриваемым свойством, то есть некоторая вершина A не связана непосредственно со своей ближайшей соседкой B. Пусть вершина A непосредственно связана с вершинами C, D и E (отличными от B). Любая из вершин C, D и E связана с вершиной B одним звеном или цепочкой их. Пусть, например, вершина D связана с B цепочкой $DKLB$ (рис. 58). Удалим звено AD и добавим звено AB. Эта замена не нарушит связности сети. Что же изменится? Изменится длина сети. Так как вершина B — ближайшая соседка к A, то $AD > AB$ и, значит, длина сети уменьшится, то есть получившаяся сеть будет короче кратчайшей сети. Мы пришли к противоречию, поэтому исходное предположение должно быть отброшено и, следовательно, каждая вершина кратчайшей сети должна быть непосредственно связана с ближайшей соседкой.

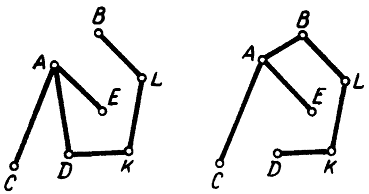


Рис. 58

2. *Каждый фрагмент кратчайшей сети связан непосредственно с ближайшим фрагментом (или одним из них, если ближайших фрагментов несколько) кратчайшим звеном.* Отметим, что вершину можно считать частным случаем фрагмента.

Наверное, нет необходимости разъяснять, какой фрагмент следует считать ближайшим соседом по отношению к данному фрагменту. Да и само обоснование второго свойства не представляет труда, так как его можно провести по аналогии с обоснованием первого свойства.

49. Пусть второе свойство попытается обосновать сам читатель.

Случаи, когда ближайших соседей будет больше, чем один, мы не будем рассматривать. Примем без обоснований, что рассмотренные свойства остаются верными и для них.

Как же строить кратчайшие сети?

Опираясь на установленные два свойства кратчайших сетей, можно сформулировать два основных п р а в и л а построения таких сетей.

1. Всякая изолированная вершина должна связываться с ближайшей соседкой.

2. Всякий изолированный фрагмент должен связываться с ближайшим к нему соседом кратчайшим звеном.

Применяя два эти правила в любой последовательности, можно построить кратчайшую сеть. Но требуемое построение можно и систематизировать. Начинать построение нужно однократным применением первого правила. Получится фрагмент (одно звено). Затем надо применять второе правило для постепенного расширения исходного фрагмента до искомой кратчайшей сети.

Обратимся к нашему примеру кратчайшей сети. Мы ее строили так. За исходную точку взяли *1*, но можно было бы взять и любую другую. Затем по первому правилу построили звено *1—2*. Дальше мы последовательно строили звенья *2—3*, *3—4*, *4—5*, *4—6* и *3—7*.

КРАТКО О ГРАФАХ

Всего несколько лет назад математики ввели в употребление понятие графа и начали разрабатывать теорию графов.

Что такое граф?

Проще всего получить представление о графе на конкретном примере. Представим себе, что несколько человек собрались вместе. Одни из них знакомы друг с другом, другие нет. Отношение знакомства между собравшимися мы можем представить графически. Возьмем на листе бумаги столько точек, сколько собралось человек. Каждому из собравшихся приведем в соответствие одну и только одну из этих точек. Если два человека знакомы, то соответствующие им точки соединим отрезком (или другой какой-нибудь кривой). В результате мы получим фигуру, называемую графом. Рисунок 59 представляет собой граф для случая, когда собравшихся 5 человек. Мы видим, что *A* знаком с *D* и *C*; *D* знаком с *A* и *C*; *E* знаком с *C*; *B* ни с кем из собравшихся не знаком; *C* знаком с *A*, *D* и *E*.

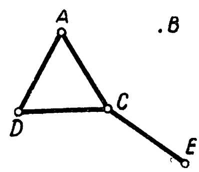


Рис. 59

Граф — это фигура, состоящая из нескольких точек (вершин) и соединяющих их отрезков или дуг кривых (ребер). И каждый раз, когда мы берем несколько точек, изображающих некоторые объекты, и соединяем их линиями, если соответствующие объекты находятся в некотором отношении, мы получаем граф.

Будем называть граф полным, если любые две вершины его соединены ребром. Граф, изображенный на рисунке 59, не является полным. Он был бы полным, если бы все собравшиеся были знакомы друг с другом.

Вершина B графа на рисунке 59 называется изолированной. Граф, все вершины которого изолированные, называется нуль-графом.

Если окажется так, что из любой вершины графа по ребрам его можно перейти в любую другую вершину, то такой граф называется связным. Наш граф не является связным. Несвязный граф распадается на отдельные части, не соединенные ребрами. Эти части называются связными компонентами графа. В нашем случае таких компонентов 2.

Цепью графа называется последовательность ребер, составляющая непрерывную линию. Если начало цепи совпадает с ее концом, то такая цепь называется циклом. В нашем случае цепи — это ломаные ACE, $ADCE$ и другие, а ломаная $ACDA$ — цикл.

Может оказаться так, что связный граф совсем не будет иметь циклов. Такой граф называется деревом. Граф, изображенный на рисунке 57, является деревом.

Произвольный связный граф (с конечным числом вершин) можно превратить в дерево. Это можно сделать так: если данный граф содержит какой-нибудь цикл, то удалим одно из ребер этого цикла. Если после этого граф будет содержать цикл, то снова удалим какое-нибудь ребро его. Продолжая эти удаления ребер до тех пор, пока совсем не останется циклов, получим граф без циклов, то есть дерево. Конечно, ребра нужно удалять так, чтобы граф оставался связным.

С графами приходится иметь дело довольно часто. Карта дорог, схема водопровода, газопровода, теплосети, телефонной сети, электросети и т. д. — все это графы[1]. Графами являются и те сети, о которых говорилось перед этим.

Кратчайшая сеть, построением которой мы занимались выше, не может содержать ни одного цикла. Если бы она содержала какой-нибудь цикл, то одно из ребер его можно было бы удалить. Получившийся граф остался бы связ-

[1] С элементарной теорией графов читатель может познакомиться по книге О. Оре «Графы и их приложения» (изд. «Мир», М., 1965).

ным, а сумма длин ребер его оказалась бы меньше. Поэтому кратчайшая сеть должна быть деревом.

Построение кратчайшей сети мы можем сейчас охарактеризовать так. Первым ребром нужно взять самое короткое из всех ребер. Вторым ребром возьмем самое короткое из оставшихся. Продолжая этот отбор, нам нужно следить за тем, чтобы каждый раз выбиралось наиболее короткое из оставшихся ребер, не образующее цикла с уже выбранными ребрами. Так как вершин сети конечное число, то этот процесс на каком-то шаге закончится и получится дерево.

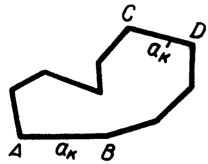


Рис. 60

Докажем, что это дерево будет кратчайшей сетью[1].

Обозначим получившийся граф буквой $Г$ и перенумеруем все ребра его в том порядке, в каком они отбирались: a_1, a_2, a_3 ... . Предположим, что какой-то другой граф $Г_1$ будет иметь наименьшую возможную сумму длин ребер. $Г$ и $Г_1$ — как это было выяснено выше — деревья. Несколько первых ребер из a_1, a_2, a_3, ... , возможно, принадлежат и $Г_1$. Пусть $a_k = AB$ — первое из ребер $Г$, не принадлежащих $Г_1$. Дерево $Г_1$ должно содержать цепь, соединяющую вершины A и B. Присоединив эту цепь к $Г$, мы получим цикл. Но $Г$ не может содержать цикла, и поэтому хотя бы одно из ребер этого цикла не принадлежит $Г$. Пусть это будет ребро $a_k' = CD$ (рис. 60). Вычеркнув из дерева $Г_1$ ребро a_k' и заменив его ребром a_k, мы получим новое дерево $Г_2$ с теми же вершинами. От такой замены дерева $Г_1$ деревом $Г_2$ сумма длин ребер не может уменьшиться, так как дерево $Г_1$ — кратчайшее. Поэтому $a_k \geqslant a_k'$ (1). Вспомним, что a_k по построению дерева $Г$ было наиболее коротким ребром, от присоединения которого к a_1, a_2, ... , a_{k-1} не получается никакого цикла. Когда мы присоединим к ребрам a_1, a_2, a_3, ... , a_{k-1} ребро a_k', то тоже не может получиться цикла (так как все эти ребра содержатся в $Г$). Следовательно, $a_k \leqslant a_k'$ (2). Из неравенств (1) и (2) следует, что $a_k = a_k'$. Значит, сумма длин всех ребер $Г_2$ равна сумме длин ребер $Г_1$, и $Г_2$

[1] Это доказательство мы заимствуем из статьи Л. И. Головиной «Графы и их приложения» («Математика в школе», 1965, № 3).

с деревом Γ имеет общих ребер одним больше, чем Γ_1. Продолжая такую замену ребер, мы найдем дерево с наименьшей возможной суммой длин ребер, совпадающее с Γ. Значит, Γ — кратчайшая сеть.

50. Возьмите 10 произвольных точек и постройте для них кратчайшую сеть.

51. Полный граф с 5 вершинами превратите в дерево с наименьшей суммой длин ребер.

52. Попытайтесь придумать какой-нибудь иной способ решения задачи на построение кратчайшей сети.

ОБОБЩЕНИЯ ЗАДАЧИ О КРАТЧАЙШЕЙ СЕТИ

Рассмотренные выше решения задачи о кратчайшей сети используют сравнение расстояний, заданных графически, на чертеже. Но расстояния между вершинами могут задаваться указанием чисел, выражающих длины соответствующих отрезков. Это можно делать с помощью схематических чертежей с проставлением на них числовых значений расстояний (рис. 61) или же с помощью таблиц

Таблица 2

—	1	2	3	4	5	6
1	–	6,7	5,2	2,8	5,6	3,6
2	6,7	–	5,7	7,3	5,1	3,2
3	5,2	5,7	–	3,4	8,5	4,0
4	2,8	7,3	3,4	–	8,0	4,4
5	5,6	5,1	8,5	8,0	–	4,6
6	3,6	3,2	4,0	4,4	4,6	–

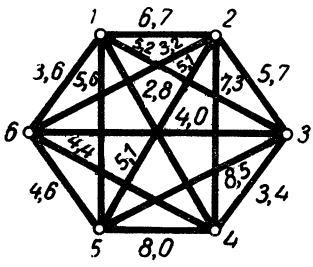


Рис 61

с двумя входами (рис. 61). В каждом из этих случаев для построения кратчайшей сети придется вместо геометрического сравнения расстояний сравнивать числовые значения их (табл. 2). Все остальное, по существу, не изменяется.

Некоторый интерес представляет задача на построение наиболее длинной сети (дерева). Читатель скажет, что такая задача не имеет практического значения. Может быть, это и так, но часто математические задачи некоторое время кажутся очень далекими от практики, а потом вдруг обнаруживается большое практическое значение их. Может быть, и эта задача найдет практические применения. В математике полезно заготовлять впрок.

Как же решать задачу на построение наиболее длинной сети?

Если подумать, то, пожалуй, возникнет догадка — решать ее так же, как решалась задача на кратчайшую сеть, только вместо ближних соседок и соседей нужно брать самых далеких. Догадка хорошая, и ею можно воспользоваться.

53. Постройте, например, этим способом наиболее длинную сеть для шести точек (рис. 61).

А может быть, задачу на построение наиболее длинной сети можно свести к задаче на построение кратчайшей сети?

Это легко сделать, если расстояния между точками заданы числами (например, с помощью таблицы с двумя входами). Тогда достаточно будет эти числа заменить обратными им и для полученной таким образом таблицы чисел решить задачу на кратчайшую сеть. Оправдать такое решение можно тем, что если три положительных числа a_1, a_2 и a_3 связаны неравенствами $a_1 < a_2 < a_3$, то для обратных им чисел верны неравенства $\frac{1}{a_1} > \frac{1}{a_2} > \frac{1}{a_3}$.

Рассмотрим еще задачу на кратчайшую сеть, связывающую n данных попарно не пересекающихся отрезков. Договоримся прежде всего, что именно будем понимать под расстоянием между двумя данными отрезками. Так, мы будем называть наименьшее расстояние между любой точкой одного и любой точкой другого отрезка. Если, например, отрезки a и b расположены так, как показано на рисунке 62, то расстояние между ними равно длине отрезка AB.

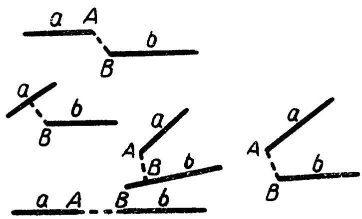


Рис. 62

Для построения кратчайшей сети, связывающей отрезки, можно поступать так же, как при решении задачи на кратчайшую сеть, связывающую точки. Только роль точек здесь играют отрезки. Сами эти отрезки в сеть не включаются.

54. Возьмите 5 отрезков и постройте для них кратчайшую сеть.

Вместо отрезков можно было бы взять *n* окружностей, которые попарно не пересекаются и не лежат одна внутри другой. Для них, как и для отрезков, можно ввести понятие расстояния и сформулировать задачу на кратчайшую сеть.

55. Выполните построение кратчайшей сети, например для 6 данных окружностей, принимая за расстояние между двумя окружностями наименьшее из расстояний между любой точкой одной из этих окружностей и любой точкой другой.

Вернемся к графам. Граф может быть задан таблицей с двумя входами или схематическим чертежом. В таблице и на чертеже должны быть указаны числа. Эти числа могут выражать не только расстояния, но, например, стоимости перевозок, электрические сопротивления, стоимости прокладки соответствующих участков сети и т. д. Они могут быть не только положительными, но и отрицательными. Будем называть их в е с а м и р е б е р.

Если задан какой-либо связный полный или неполный граф, то может быть поставлена задача нахождения кратчайшей сети, которую можно назвать к р а т ч а й ш и м д е р е в о м. Возьмем граф, задаваемый схемой (рис. 61). Выделим из него кратчайшее дерево. Начнем с вершины *1*. Б л и ж а й ш е й к ней вершиной является *4*.

Возьмем поэтому ребро *1—4*. Дальше, сравним веса других ребер, исходящих из вершин *1* и *4*. Ближайшей вершиной к ребру *1—4* является *3*. Возьмем ребро *4—3*. Затем для получившегося фрагмента *1—4—3* находим ближайшую вершину *6*. Возьмем ребро *1—6*. Дальше *6—2* и, наконец, *6—5*. Получим кратчайшее дерево для этого графа (рис. 63).

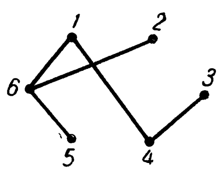


Рис. 63

Возьмем неполный граф, заданный схемой (рис. 64). Кратчайшее дерево для него будет таким, как показано на рисунке 65.

Так же как в случае графов, ребра которых — расстояния между соединяемыми ими вершинами, может быть поставлена задача о д л и н н е й ш е м дереве и для графов с ребрами, характеризуемыми весами.

56. Найдите длиннейшее дерево для каждого из графов, заданных схемами 61 и 64.

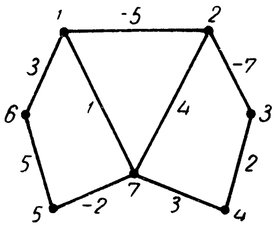


Рис. 64

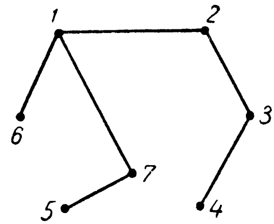


Рис. 65

Рассмотрим еще задачу, сводящуюся к нахождению кратчайшего дерева.

Пусть некоторое сообщение должно быть передано группе лиц. Каждый из этой группы дошедшее до него сообщение может передать любому другому лицу из той же группы. Для этого ему понадобится определенное время. Обозначим через t_{km} время, необходимое для передачи сообщения лицом k лицу m (k и m — натуральные числа, обозначающие номера лиц). Следует считать, что $t_{km} = t_{mk}$. Требуется так выбрать последовательность передач сообщения, чтобы для этого потребовалось наименьшее время. Будем при этом предполагать, что одновременная передача сообщения двум лицам невозможна.

Для решения получившейся задачи достаточно рассмотреть граф, вершинами которого являются лица, между которыми должно быть распространено сообщение, а весами ребер служат промежутки времени, необходимые для передачи сообщения. В этом графе нужно найти кратчайшее дерево.

Отметим, что задача о передаче сообщения мало усложняется, если окажется, что некоторые лица не могут передавать полученное ими сообщение некоторым (не всем) другим лицам. Граф в этом случае будет н е п о л н ы м.

Но граф может оказаться и несвязным. Тогда в ходе решения задачи обнаружится невозможность выделения кратчайшего дерева, то есть невозможность передачи сообщения.

МИНИМАЛЬНЫЕ СЕТИ

Рассмотрим новую задачу на сети. Внешне она похожа на задачу о кратчайших сетях. Как и там, возьмем на плоскости n точек. Требуется эти точки соединить отрезками или ломаными так, чтобы:

1) любые две точки из данных были связаны отрезком или ломаной (вершины ломаной могут и не быть данными точками),

2) сумма длин всех отрезков сети была наименьшей.

Будем называть систему отрезков и ломаных, удовлетворяющую этим условиям, минимальной сетью.

Как же строить минимальные сети?

Начнем с наиболее простых случаев. Возьмем вначале три точки A_1, A_2, A_3. Их можно считать не лежащими на одной прямой, так как если бы они лежали на одной прямой, то минимальной сетью был бы отрезок, соединяющий крайние точки.

В общем случае для трех данных точек минимальная сеть может быть построена просто. Достаточно найти для этих точек так называемую точку Торричелли[1] и соединить ее отрезками с данными точками.

Точкой Торричелли называется такая точка, сумма расстояний которой от трех данных точек минимальна. Как же построить эту точку?

Выясним прежде всего, может ли точка Торричелли лежать вне треугольника $A_1A_2A_3$. Возьмем произвольную точку P, лежащую вне этого треугольника. Если представить себе стороны треугольника продолженными, то внешние области по отношению к этому треугольнику будут двух типов: прилежащие к сторонам и угловые. Соответственно этому рассмотрим два случая (рис. 66). Для первого из двух случаев очевидно неравенство $A_1P + A_2P + A_3P > A_1P_1 + A_2P_1 + A_3P_1$. Для второго случая получается неравенство $A_1P + A_2P + A_3P > A_1A_2 + A_2A_3$,

---

[1] Эванджелисто Торричелли (1608—1647)—итальянский математик и физик, ученик Галилео Галилея.

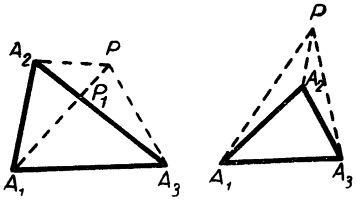


Рис. 66

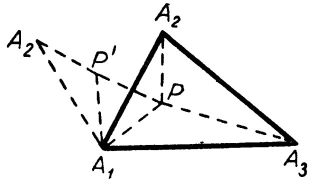


Рис. 67

так как $A_1P > A_1A_2$ и $A_3P > A_2A_3$. Можно доказать далее, что точка P не может лежать и на продолжении какой-либо стороны треугольника. Следовательно, точка Торричелли не может лежать вне треугольника $A_1A_2A_3$. Нетрудно показать, что она не может лежать и на сторонах этого треугольника (между вершинами его). Значит, точка Торричелли может лежать лишь внутри треугольника или в одной из вершин его.

Возьмем такие три точки A_1, A_2 и A_3, чтобы каждый из углов треугольника $A_1A_2A_3$ был меньше 120°, и пусть P — произвольная внутренняя точка его (рис. 67). Повернем треугольник A_1A_2P вокруг точки A_1 на 60°. Он займет положение $A_1A_2'P'$. Получим $PA_1 + PA_2 + PA_3 = A_2'P' + P'P + PA_3$, так как $A_2P = A_2'P'$ и $P'A' = PA_1$. Значит, сумма расстояний от точки P до точек A_1, A_2 и A_3 равна длине ломаной $A_2'P'PA_3$, которая будет наименьшей, если точки P' и P будут лежать на прямой $A_2'A_3$. Но тогда угол A_1PA_3 должен быть равен 120°, так как смежный ему угол A_1PP' равен 60°. Точно так же можно доказать, что и угол A_2PA_3 должен быть равен 120°. Поэтому для построения точки P достаточно построить два сегмента, опирающихся на отрезки A_2A_3 и A_1A_3 и вмещающих каждый угол в 120°. Короче говоря, точка Торричелли — это такая точка, из которой каждый отрезок A_1A_2, A_1A_3 и A_2A_3 виден под углом в 120°.

57. На двух сторонах A_1A_2 и A_1A_3 данного треугольника $A_1A_2A_3$ построим два равносторонних треугольника (внешних по отношению к нему) A_1CA_2 и A_1BA_3 Проведем отрезки CA_3 и BA_2. Доказать, что точка пересечения этих отрезков есть точка Торричелли.

Остается рассмотреть случай, когда один из углов треугольника $A_1A_2A_3$ равен или больше 120°.

58. Попытайтесь доказать, что если один из углов треугольника $A_1A_2A_3$, например A_2, равен или больше $120°$, то точкой Торричелли является вершина этого угла (A_2).

Отметим, что попутно с решением задачи на минимальную сеть для трех точек мы решили следующую задачу Штейнера. Даны три точки: A_1, A_2, A_3. Требуется в плоскости, определяемой этими точками, найти такую точку P, сумма расстояний которой от точек A_1, A_2 и A_3 была бы минимальной. Искомой точкой, как мы установили, является точка Торричелли.

Задаче о минимальной сети могут быть даны различные конкретные истолкования. Можно, например, поставить вопрос о том, как соединить прямолинейными (состоящими из прямолинейных участков) дорогами несколько населенных пунктов. Точно так же к задаче о минимальных сетях приводит задача о наиболее целесообразном соединении трубопроводами (из прямолинейных участков) нескольких скважин, из которых выделяется газ. Можно дать этой задаче и иные истолкования. Все это повышает наш интерес к минимальным сетям, и случаем трех точек мы не можем ограничиться.

Усложним задачу, взяв четыре точки A_1, A_2, A_3 и A_4. Естественно ожидать, что для четырех точек минимальная сеть будет существенно зависеть от того, как они расположены. Пусть, например, точки A_1, A_2, A_3 и A_4 являются вершинами квадрата. Для построения минимальной сети в этом случае поступим так: через центр квадрата проведем прямую, параллельную одной из сторон квадрата, например стороне A_1A_2. На этой прямой внутри квадрата построим такие две точки P_1 и P_2, чтобы из P_1 сторона A_2A_3, а из P_2 сторона A_1A_4 были видны под углом в $120°$ (рис. 68). Тогда сеть, состоящая из отрезков A_1P_2, A_4P_2, A_2P_1, A_3P_1 и P_2P_1, будет минимальной. (Читатель может попытаться доказать это, закончив чтение настоящего параграфа.)

59. В рассмотренном случае задача имеет еще одно решение. Найдите его.

60. Постройте минимальную сеть, если данные точки являются вершинами прямоугольника.

61. Найдите такую точку в плоскости квадрата, сумма расстояний которой от вершин его была бы наименьшей. То же самое проделайте для произвольного выпуклого четырехугольника.

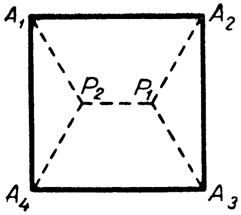


Рис. 68

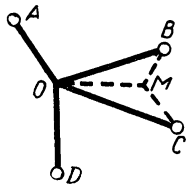


Рис. 69

Мы уже приобрели некоторый опыт построения минимальных сетей. Дело оказалось нелегким. Появляется поэтому желание основательно вооружиться для решения таких задач. Примем без доказательства, что минимальная сеть существует, и выясним некоторые достаточно важные свойства ее.

1. Покажем прежде всего, что минимальная сеть должна состоять из отрезков. Если бы минимальная сеть содержала в себе некоторую кривую, то мы взяли бы такую дугу этой кривой, которая не содержит данных точек и точек разветвления сети. Эту дугу мы могли бы заменить отрезком, соединяющим концы ее. Получилась бы новая сеть с меньшей длиной, но это невозможно, так как исходная сеть минимальна.

2. Докажем далее, что в точке минимальной сети могут сходиться самое большее три отрезка. Пусть в точке O сходятся четыре отрезка (рис. 69). По меньшей мере один из углов при вершине O окажется острым или прямым. Пусть, например, таким углом будет угол BOC. Для треугольника BOC построим точку Торричелли M (она отлична от O). Тогда $MO + MB + MC < OB + OC$, и если мы в минимальной сети заменим $OB + OC$ через $MO + MB + MC$, то получим связывающую сеть с длиной, меньшей длины минимальной сети, что невозможно.

3. Будем называть узлом сети такую точку ее, в которой сходятся три отрезка. Докажем, что эти три отрезка в случае минимальной сети делят полный угол с вершиной в узле O сети на три равных угла (каждый по 120°). Пусть, например, угол AOB (рис. 70) меньше 120°. Для треугольника AOB найдется точка Торричелли M

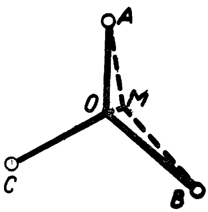


Рис. 70

(отличная от O) и будет верно неравенство $AM + OM + BM < AO + OB$. Тогда в минимальной сети отрезки OA и OB можно заменить отрезками AM, OM и BM. Длина сети от этой замены уменьшится, что противоречит минимальности данной сети. Значит, ни один из трех углов при вершине O не может быть меньше 120°. Но ни один из них не может быть и больше 120°, так как тогда нашелся бы угол меньше 120°.

4. В старших классах одной из школ была проведена анкета. Среди вопросов этой анкеты был и такой: «Какие занятия на уроках математики вам больше всего нравятся?»

Типичным ответом на этот вопрос был следующий ответ ученика IX класса: «Разве это не ясно, что полезнее всего для учеников самостоятельные занятия». Очень хороший ответ. Пусть же и наш читатель самостоятельно поработает.

62. Доказать, что если в данной точке сходятся два отрезка минимальной сети, то меньший из двух углов, образованных ими, не может быть меньше 120° (4-е свойство).

5. Назовем связную сеть о д н о с в я з н о й, если из нее нельзя выбросить ни одного отрезка без нарушения связности. Иными словами, сеть называется односвязной, если при выбрасывании любого внутреннего звена ее получаются несвязные части.

63. Доказать, что минимальная сеть односвязна (5-е свойство).

64. Из этого свойства (63) вытекает, что любые две данные точки (вершины сети) в случае минимальной сети соединены только одним путем. Доказать это.

6. Представим себе три данные точки A, B и C (вершины сети). На отрезке AC, как на диаметре, построим окружность. Пусть точка B лежит внутри этой окружности и на отрезке AC других данных точек нет. Докажем, что в этом случае отрезок AC не может входить в минимальную сеть.

Пусть отрезок AC входит в минимальную сеть (рис. 71). Тогда отрезок CB, образующий с CA острый угол, по свойству 4 не может входить в минимальную сеть. Точно так же не может входить в минимальную сеть и отрезок AB. Но точка B должна быть соединена с точкой A некоторым путем по отрезкам минимальной сети. Обозначим этот путь так: $A \leftrightarrow B$. (Точку C можно считать не лежащей на этом пути.) Обращаясь к точкам B и C, мы заключаем, что они связаны путем $B \leftrightarrow C = B \leftrightarrow A + AC$. Выбросим из сети отрезок AC и присоединим к сети отрезок BC. Связность сети это не нарушит. Только путь от A к C будет таким: $A \leftrightarrow B + BC$. Длина же минимальной сети от такой замены уменьшится (ибо $AC > BC$), что невозможно.

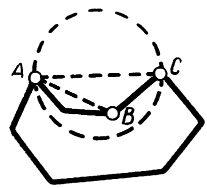


Рис 71

Можно было бы в исследовании свойств минимальных сетей продвинуться дальше и найти еще несколько необходимых условий, которым эти сети должны удовлетворять[1]. Это облегчило бы построение минимальных сетей. И все же эффективного приема решения задачи на построение минимальной сети в общем случае еще не найдено.

В заключение приведем несколько примеров минимальных сетей (рис. 72, 73).

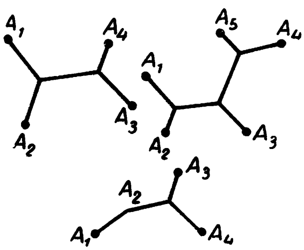


Рис. 72

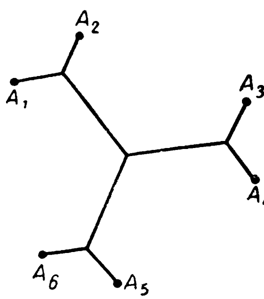


Рис. 73

[1] При изложении свойств минимальных сетей мы пользовались статьей В. М. Прокофьева «Некоторые свойства кратчайшей линии, соединяющей любое число данных точек плоскости», напечатанной в «Ученых записках Московского государственного педагогического института им. В. И Ленина» (т. 101, вып. 3). В этой статье рассмотрены и другие свойства минимальных сетей.

Отметим, что если данные точки являются вершинами ломаной линии с углами при вершинах достаточно близкими к 180°, то в этом случае сама ломаная будет служить минимальной сетью.

65. Постройте кратчайшую сеть для вершин правильного пятиугольника (правильного шестиугольника).

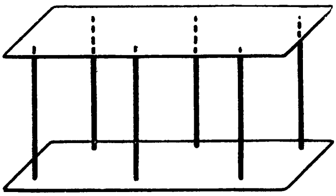


Рис 74

Минимальные сети можно получать опытным путем. Для этого нужно на тонкой деревянной пластинке отметить несколько точек, воткнуть в них (перпендикулярно пластинке) невысокие иголки, острые с обоих концов, а затем приложить с усилием вторую деревянную пластинку, чтобы вторые концы иголок вошли и в нее (рис. 74). Получившуюся фигуру нужно погрузить в мыльный раствор и вынуть. Мыльная пленка соединит иголки по минимальной поверхности. Любое сечение этой поверхности плоскостью, параллельной пластинкам, дает минимальную сеть.

ЗАДАЧА, ЖДУЩАЯ СВОЕГО РЕШЕНИЯ

Рассмотрим задачу: *В леспромхозе—три лесоучастка, на которых ведется заготовка леса. Каждый день рабочих приходится развозить по этим участкам и привозить их обратно. Вот и возникает интересная задача — найти кратчайший маршрут автобуса.*

Изобразим на рисунке лесоучастки A_1, A_2 и A_3 и центральный поселок O, где живут рабочие. Получим треугольник $A_1A_2A_3$ и внутри него точку O. Автобус должен выйти из O, развезти всех рабочих по участкам и вернуться в O. Двигаться автобус может только по дорогам, изображенным на рисунке отрезками. Для определенности будем еще считать, что $\angle A_1 > \angle A_2 > \angle A_3$ и точка O равноудалена от сторон треугольника $A_1A_2A_3$ (рис. 75). Каким же должен быть маршрут автобуса?

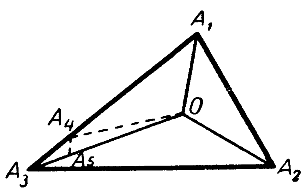


Рис 75

Первое впечатление от задачи о кратчайшем маршруте автобуса таково, что она может быть решена методом сравнения всех маршрутов. В самом деле, различных возможных маршрутов здесь немного. Выпишем их:

1) $S_1 = OA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + A_3O$,

2) $S_2 = OA_1 + A_1A_3 + A_3A_2 + A_2O$,

3) $S_3 = OA_2 + A_2A_3 + A_3A_1 + A_1O$,

4) $S_4 = OA_2 + A_2A_1 + A_1A_3 + A_3O$,

5) $S_5 = OA_3 + A_3A_1 + A_1A_2 + A_2O$,

6) $S_6 = OA_3 + A_3A_2 + A_2A_1 + A_1O$.

Сравнение этих шести возможных маршрутов сразу же позволяет нам ограничиться рассмотрением трех из них, так как $S_1 = S_6$, $S_2 = S_3$ и $S_4 = S_5$. Возьмем же по одному маршруту из каждой пары их, равных между собой, например такие: S_1, S_2 и S_4. Сравним вначале S_1 и S_2. Для этого отложим на стороне A_1A_3 отрезок A_1A_4, равный A_1A_2, и на отрезке OA_3 отрезок OA_5, равный OA_2, и соединим A_4 с A_5 отрезком прямой. Получаем: $\triangle OA_1A_4 = \triangle OA_1A_2$, значит, $OA_4 = OA_2 = OA_5$ и $\angle A_4A_5O < 90°$, а $\angle A_4A_5A_3 > 90°$. Поэтому $A_4A_3 > A_3A_5$, или $A_1A_3 - A_1A_2 > OA_3 - OA_2$, а отсюда $A_1A_3 + OA_2 > OA_3 + A_1A_2$. Прибавив к обеим частям получившегося неравенства по $A_3A_2 + OA_1$, мы получим неравенство $OA_1 + A_3A_2 + A_1A_3 + OA_2 > OA_3 + A_1A_2 + A_3A_2 + OA_1$, то есть $S_2 > S_1$. Остается сравнить S_1 и S_4. Рассуждая аналогично, найдем что $S_1 > S_4$. Таким образом, кратчайшими оказываются равные по длине маршруты S_4 и S_5.

Если бы положение точки O было иным, задачу можно было бы решить вычислением или построением длин маршрутов и сравнением их.

66. Решите задачу о кратчайшем маршруте автобуса, если центральный поселок располагается вне треугольника $A_1A_2A_3$.

Если бы у леспромхоза, о котором говорилось выше, было не три лесоучастка, а четыре, то решение задачи о выборе кратчайшего маршрута автобуса осложнилось бы. Пришлось бы сравнивать не три маршрута, а больше. Еще сложней было бы решение, если бы точек, которые требуется связать кратчайшим маршрутом, оказалось больше. И все же выделением и сравнением всех возможных маршрутов такую задачу, наверное, можно было бы решить.

Общую задачу рассматриваемого вида можно сформулировать так:

На плоскости даны n точек. Требуется найти замкнутый, состоящий из прямолинейных отрезков путь минимальной длины, связывающий эти точки.

Эту задачу часто называют задачей о бродячем торговце. Данные точки — населенные пункты. Торговец должен обойти все их по кратчайшему маршруту.

Как видим, условие этой задачи просто и ясно. Сама задача кажется простой. Однако эффективного решения ее (отличного от сравнения всех возможных маршрутов) все еще не найдено. Можно даже сказать, что не известно ничего, что хотя бы приближалось к эффективному методу решения.

Для большей полноты рассмотрения вопросов о сетях рекомендуем еще прочитать в книге Г. Радемахера и О. Теплица «Числа и фигуры» (Физматгиз, 1962) о маршрутах в сети кривых. Там разобрано решение следующей задачи: *Трамвайные маршруты, обслуживающие некоторый город, предположено спланировать так, чтобы каждая трамвайная линия обслуживалась лишь одним маршрутом. Пассажиру предоставлено право с одним и тем же билетом переходить с маршрута на маршрут и делать столько пересадок, сколько нужно, чтобы достигнуть цели. Требуется определить наименьшее число маршрутов.*

Решается эта задача элементарно и красиво. Наверно, читателя заинтересует и сама задача и ее решение.

С ПОМОЩЬЮ МЕХАНИКИ

Для решения некоторых задач на экстремумы можно с успехом пользоваться понятиями, заимствуемыми из механики. Вот одна такая задача: *На плоскости даны n точек A_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$). Требуется найти такую точку, чтобы сумма квадратов ее расстояний от данных точек была наименьшей.*

Для решения этой задачи нам понадобится понятие центра тяжести системы материальных точек. Обратимся поэтому за помощью к механике.

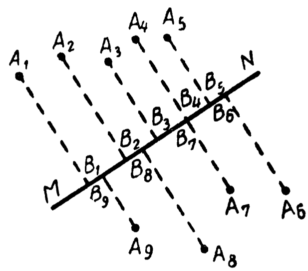


Рис. 76

Будем считать, что в каждой данной точке A_i сосредоточена масса, равная m_i. Это дает нам основания называть данные точки материальными. Возьмем еще в плоскости, определяемой данными точками, произвольную прямую и из каждой точки A_i на эту прямую опустим перпендикуляр. Длину этого перпендикуляра будем брать со знаком «+» или «—» в зависимости от того, с какой стороны от взятой прямой он лежит (рис. 76).

Центр тяжести системы материальных точек в механике определяется так. Это точка, которая обладает следующим свойством: если сосредоточить в ней всю массу системы, то произведение этой массы на расстояние этой точки от любой данной прямой равно сумме произведений масс точек на расстояния этих точек от данной прямой. Значит, x — расстояние центра тяжести от прямой MN определяется равенством $(m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n)\, x = m_1 A_1B_1 + m_2A_2B_2 + m_3A_3B_3 + \ldots + m_n A_nB_n$[1]. Отметим, что центр тяжести системы точек часто называют центроидом этой системы.

Чтобы построить центр тяжести, надо взять еще одну прямую M_1N_1, непараллельную первой прямой MN (лучше — перпендикулярную ей). Тогда по расстояниям центра тяжести от двух прямых MN и M_1N_1 (по координатам) его можно построить. Вот, пожалуй, и все, что нам понадобится здесь из области механики.

Вернемся к задаче. Для большей определенности возьмем, например, 4 точки и докажем, что искомой точкой будет центр тяжести системы данных точек, рассматриваемых как материальные (с массой, равной 1 в каждой из них).

Выведем сначала формулу для вычисления суммы квадратов расстояний данных точек A_1, A_2, A_3 и A_4 от произвольно взятой в той же плоскости точки P (рис. 77).

---

[1] Читателю будет полезна книжка В. А. Успенского «Некоторые приложения механики к математике» (Физматгиз, 1958).

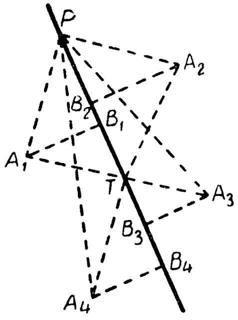


Рис. 77

Пусть T — центроид системы данных точек. Тогда, рассмотрев каждый из треугольников A_1PT, A_2PT, A_3PT и A_4PT, на основании известной теоремы о квадрате стороны треугольника найдем:

$$A_1P^2 = A_1T^2 + PT^2 - 2PT \cdot TB_1,$$
$$A_2P^2 = A_2T^2 + PT^2 - 2PT \cdot TB_2,$$
$$A_3P^2 = A_3T^2 + PT^2 - 2PT \cdot TB_3,$$
$$A_4P^2 = A_4T^2 + PT^2 - 2PT \cdot TB_4.$$

В этих формулах TB_1, TB_2, TB_3 и TB_4 — проекции сторон TA_1, TA_2, TA_3 и TA_4 на прямую TP — следует считать положительными, если они располагаются от точки T в сторону точки P, и отрицательными в противном случае. Суммируя получившиеся равенства по частям, получим $A_1P^2 + A_2P^2 + A_3P^2 + A_4P^2 = A_1T^2 + A_2T^2 + A_3T^2 + A_4T^2 + 4PT^2 - 2PT\,(TB_1 + TB_2 + TB_3 + TB_4)$. Рассмотрим сумму $TB_1 + TB_2 + TB_3 + TB_4$. Если через точку T провести прямую MN, перпендикулярную PT, то TB_1, TB_2, TB_3 и TB_4 можно истолковать как расстояния точек A_1, A_2, A_3 и A_4 до этой прямой. По условию T — центр тяжести системы этих точек, в каждой из которых сосредоточена единичная масса. Поэтому на основании равенства, определяющего центр тяжести, получаем: $TB_1 + TB_2 + TB_3 + TB_4 = 4x$, где x — расстояние от центра тяжести до прямой MN. Но эта прямая проведена через центр тяжести, и поэтому $x = 0$. Следовательно, $TB_1 + TB_2 + TB_3 + TB_4 = 0$ и, значит, $A_1P^2 + A_2P^2 + A_3P^2 + A_4P^2 = A_1T^2 + A_2T^2 + A_3T^2 + 4PT^2$.

В общем случае получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} A_iP^2 = \sum_{i=1}^{n} A_iT^2 + nPT^2.$$

Эту формулу часто называют формулой Лейбница[1].

---

[1] Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716)—великий немецкий математик. Важнейшей заслугой Лейбница в области математики является разработка (наряду с Ньютоном) дифференциального и интегрального исчислений.

Выведенной формулой мы и воспользуемся для доказательства требуемого.

С изменением положения точки P будет изменяться $\sum_{i=1}^{n} A_iP^2$. Что касается суммы $\sum_{i=1}^{n} A_iT^2$, то она не будет изменяться. Значит, наименьшее значение сумма $\sum_{i=1}^{n} A_iP^2$ примет при условии $nPT^2=0$, а это будет, когда точка P совпадет с точкой T — центроидом данной системы точек.

Готфрид Вильгельм Лейбниц

Итак, сумма квадратов расстояний от точки P до n данных точек будет иметь наименьшее значение, если точка P совпадет с центроидом системы данных точек.

Как же находить центроид данной системы точек?

Можно, конечно, пользоваться, как говорилось выше, равенством, определяющим центроид. Но в простых случаях целесообразнее поступать иначе. Будем считать, что в каждой из данных точек сосредоточена единичная масса. Если таких точек две: A_1 и A_2, то центроидом будет точка, делящая отрезок A_1A_2 пополам. Если точек три, то центроидом их будет точка пересечения медиан. В случае четырех точек центроидом будет точка пересечения средних линий. Но можно поступить и так: сначала найти центроид для каких-нибудь трех точек, а затем этот центроид нужно соединить отрезком с четвертой точкой и разделить этот отрезок в отношении 1 к 3, считая от центроида.

67. Пусть для системы n точек построен центроид. Добавим еще одну точку. Как построить центроид получившейся системы $n+1$ точек?

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Познакомимся с несколькими задачами, различными по своей фабуле, но одинаковыми в математическом отношении.

1. *На двух заводах A_1 и A_2 изготовляется одинаковая продукция. На заводе A_1 изготовляется a_1 единиц продукции, на заводе A_2 — a_2 единиц. Вся продукция этих заводов покрывает полностью потребности двух городов B_1 и B_2, поставляется только в эти города и используется там полностью. Потребность города B_1 равна b_1 единицам, а города B_2 — b_2 единицам. Стоимость перевозки единицы продукции с завода A_1 в город B_1 равна 1 рублю, с завода A_1 в город B_2 — 2 рублям, с завода A_2 в город B_2 — 3 рублям. Что касается c — стоимости провоза единицы продукции с завода A_2 в город B_1, — то она может в некоторых границах изменяться (завод A_2 и город B_1 могут быть связаны, например, железной дорогой и рекой). Требуется разработать план (программу) снабжения городов B_1 и B_2 продукцией заводов A_1 и A_2 так, чтобы стоимость перевозок была наименьшей*[1].

Таблица 3

	$b_1 = 2$	$b_2 = 5$
$a_1 = 4$	1 / x_1	2 / x_2
$a_2 = 3$	c / y_1	3 / y_2

Для определенности примем: $a_1 = 4$, $a_2 = 3$, $b_1 = 2$, $b_2 = 5$, и запишем данные и искомые задачи в виде таблицы (табл. 3).

В каждой внутренней клетке таблицы проведем диагональ, а сверху запишем стоимость провоза единицы продукции с соответствующего завода в соответствующий город, а снизу — сколько продукции с этого завода должно быть перевезено в этот город.

Запишем математически условия задачи. Нам известно, что вся продукция, выпущенная заводами A_1 и A_2, потребляется городами B_1 и B_2. Следовательно, $x_1 + x_2 = 4$ (1), $y_1 + y_2 = 3$ (2). Мы знаем так же, что потребность каждого из городов B_1 и B_2 удовлетворяется продукцией,

[1] А. Н. Черкасов, Краевые экстремумы и задачи линейного программирования, «Математика в школе», 1962, № 2.

полученной с заводов A_1 и A_2. Поэтому $x_1 + y_1 = 2$ (3), $x_2 + y_2 = 5$ (4). Запишем еще стоимость всех перевозок: $z = 1x_1 + 2x_2 + cy_1 + 3y_2$ (5). Легко заметить, что уравнение (2) является следствием уравнений (1), (3) и (4), и поэтому из первых четырех уравнений возьмем только три:

$$\begin{cases} x_2 + y_2 = 5, \\ x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 + y_1 = 2. \end{cases} \tag{6}$$

Остается найти значения x_1, x_2, y_1 и y_2 так, чтобы они удовлетворяли системе (6) и функция $z = x_1 + 2x_2 + cy_1 + 3y_2$ для них принимала бы наименьшее значение.

2. *Пусть для снабжения населения города нужно завезти картофель из четырех совхозов пригородной зоны. Введем обозначения:* c_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ — *стоимость производства и перевозки тонны картофеля, выращенного в* i*-м совхозе,* b — *общая потребность города в картофеле,* b_i — *производство картофеля в* i*-м совхозе,* α_i — *пропускная способность транспорта для перевозки картофеля из* i*-го совхоза,* β_i — *меньшее из чисел,* b_i *и* α_i, x_i — *число тонн картофеля, поставляемого в город из* i*-го совхоза. Требуется разработать оптимальный (наилучший) план снабжения города картофелем (стоимость завезенного в город картофеля должна быть наименьшей).*

Разберемся в математическом содержании этой задачи. Стоимость картофеля, завезенного в город, равна

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4.$$

Требуется выбрать x_1, x_2, x_3, x_4 так, чтобы функция z для них принимала наименьшее значение. При этом должно быть: $x_i \leqslant \beta_i$, $x_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ и $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = b$.

3. Рассмотрим еще *задачу на использование сырья.*

Некоторое производство выпускает продукцию двух видов: $П_1$ *и* $П_2$. *Изготовляется эта продукция из четырех видов сырья:* S_1, S_2, S_3 *и* S_4. *Запас сырья и расход его на единицу каждого вида продукции задается таблицей* (табл. 4).

Таблица 4

Вид сырья	Запас сырья	Расход сырья на единицу продукции	
		$П_1$	$П_2$
S_1	19	2	3
S_2	13	2	1
S_3	15	0	3
S_4	18	3	0

Доход производства от единицы $П_1$ равен 7 денежным единицам, а от единицы $П_2$ — 5. Как следует спланировать выпуск продукции, чтобы доход производства был наибольшим?

Введем обозначения: x_1 — число единиц $П_1$, вырабатываемых производством, x_2 — число единиц $П_2$. Тогда решение задачи, как легко сообразить, сводится к нахождению таких значений x_1 и x_2, при которых функция $z = 7x_1 + 5x_2$ принимала бы наибольшее значение и которые удовлетворяли бы системе неравенств:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 19, \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 13, \\ 3x_2 \leqslant 15, \\ 3x_1 \leqslant 18, \\ \quad x_1 \geqslant 0, \\ \quad x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Как видим, математическое содержание приведенных здесь задач одинаково. Решение каждой из них сводится к нахождению таких значений переменных $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, для которых линейная функция этих переменных $z = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ принимала бы наименьшее (наибольшее) значение и которые удовлетворяли бы некоторой системе линейных уравнений и неравенств.

Задач, подобных рассмотренным, обычно с большим числом переменных, жизнь задает все больше и больше. Все они — многочисленные разновидности одной общей задачи: как рационально (оптимально) использовать наличные ресурсы — транспортные средства, сырье, станочное оборудование, разного рода запасы, рабочую силу и т. д.

Вопросы же рационального использования разного рода ресурсов надо считать особенно важными для нашего народного хозяйства для управления и планирования. Вот почему математикам пришлось вплотную заняться такими задачами.

Л. В. Канторович

Методы решения задач рассмотренного нами типа разрабатываются особой математической наукой — линейным программированием. Возникла эта наука совсем недавно. Первые работы по линейному программированию были выполнены в тридцатых годах этого века в Советском Союзе и Венгрии. Значительную роль в развитии линейного программирования сыграл известный советский математик Л. В. Канторович. Его работы в конце тридцатых и в сороковых годах послужили началом этой новой области математики. Л. В. Канторович показал, что целый ряд проблем планирования производства, организации его и управления им приводит к одной и той же группе экстремальных математических задач, и предложил метод их решения. Позднее разработкой методов линейного программирования занимались многие зарубежные и советские математики. Эта разработка продолжается и в наши дни.

ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

В нашей книжке мы рассмотрим простейшие приемы решения достаточно легких задач линейного программирования. Сначала подготовим все необходимое.

Нам придется находить экстремумы линейных функций. Поэтому нужно будет прежде всего овладеть понятием линейной функции.

Из школьного курса математики хорошо известна линейная функция одной независимой переменной. Это функция, выражаемая уравнением $z = a_1x_1 + b$ (a_1 и b — постоянные). Графиком ее в декартовых координатах на плоскости служит прямая линия, которая наклонена по отношению к положительному направлению оси абсцисс под углом, тангенс которого равен a_1 (a_1 — угловой коэффициент). Эта прямая на оси ординат отсекает отрезок b (b — начальная ордината).

Линейной функцией от двух независимых переменных (x_1 и x_2) называется функция, выражаемая уравнением $z = a_1x_1 + a_2x_2b$ (a_1, a_2 и b — постоянные). Геометрически эта функция может быть изображена в декартовых пространственных координатах плоскостью[1]. Но можно поступить и иначе. Поучимся у топографов. Чтобы дать представление о рельефе местности на плане ее, они вычерчивают линии уровня. Это такие линии, во всех точках которых изображаемая поверхность имеет для каждой из этих линий одну и ту же высоту (по отношению к горизонтальной плоскости). Функцию $z = a_1x_1 + a_2x_2 + b$ мы также можем изобразить линиями уровня. Возьмем конкретный пример: $z = 2x_1 + 3x_2 + 1$. Каждая пара значений независимых переменных x_1 и x_2 будет изображаться точкой P горизонтальной плоскости с координатными осями x_1 и x_2 (рис. 78). Соответствующее значение z изобразится отрезком перпендикуляра к этой плоскости, основанием которого служит взятая точка P, а длина равна соответствующему значению z (этот отрезок откладывается вверх или вниз от горизонтальной плоскости X_1OX_2 в зависимости от того, положительно или отрицательно это значение z). Имея это в виду, найдем на плоскости X_1OX_2 точки, в которых данная линейная функция принимает, например, значение 2. Взяв $z = 2$, мы получаем: $2 = 2x_1 + 3x_2 + 1$, или $x_1 = -\frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}$. На плоскости X_1OX_2 это будет прямая линия. Во всех точках ее рассматриваемая линейная функция принимает значение 2.

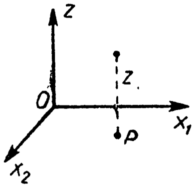


Рис. 78

Если пожелаем найти точки, в которых данная функция принимает значение 4, то получим: $4 = 2x_1 + 3x_2 + 1$, или $x_1 = -\frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{2}$. Это прямая, параллельная первой и отсекающая на оси x_1 отрезок $\frac{3}{2}$. Для $z = 0$ получаем

[1] Это доказывается в учебниках по аналитической геометрии.

прямую $x_1 = -\frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}$, параллельную первым двум. Так же могут быть построены и другие линии уровня. Если значения z брать через 2, то линии уровня будут параллельными прямыми, отстоящими последовательно друг от друга на одно и то же расстояние (рис. 79).

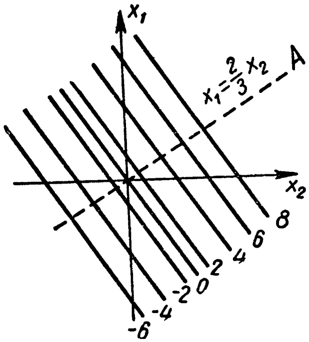


Рис. 79

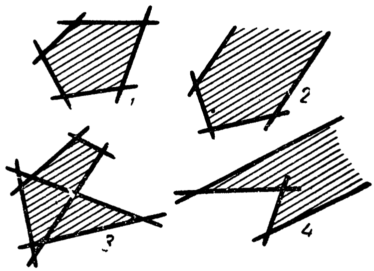


Рис. 80

Найдем еще прямую, проходящую в плоскости X_1OX_2 через начало координат и перпендикулярную линиям уровня данной линейной функции (рис. 79). Из элементарной алгебры известно, что уравнение прямой, проходящей через начало координат, имеет вид $x_1 = kx_2$, где k — угловой коэффициент. Так как искомая прямая должна быть перпендикулярна линиям уровня с угловым коэффициентом $-\frac{3}{2}$, то угловой коэффициент ее k должен быть равен $\frac{2}{3}$ (угловые коэффициенты двух взаимно перпендикулярных прямых противоположны по знаку и обратны по абсолютной величине). Поэтому уравнение искомой прямой таково: $x_1 = \frac{2}{3}x_2$, или $3x_1 - 2x_2 = 0$. Подчеркнем, что если двигаться по этой прямой от начала координат в направлении точки A, то линейная функция z будет возрастать быстрее, чем по любой другой прямой (не параллельной этой). Поэтому построенная прямая определяет направление наибольшего возрастания данной линейной функции.

Линейной функцией трех переменных называется функция $z = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + b$ (a_1, a_2, a_3 и b — постоянные). Изобразить ее геометрически непосредственно нельзя.

Нам понадобится далее понятие **выпуклого многоугольника**. Известно, что многоугольник называется выпуклым, если он располагается по одну сторону от каждой образующей его прямой. На рисунке 80 приведены примеры выпуклых (*1*, *2*) и невыпуклых (*3*, *4*) многоугольников.

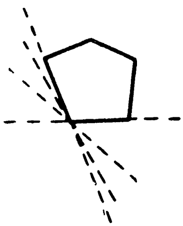


Рис. 81

Введем еще понятие **опорной прямой**. Так мы будем называть всякую прямую, которая имеет с контуром многоугольника по крайней мере одну общую точку, причем многоугольник располагается по одну сторону от нее. На рисунке 81 изображены несколько опорных прямых для данного многоугольника. Очевидно, что через каждую вершину выпуклого многоугольника можно провести бесконечно много опорных прямых, а через сторону — лишь одну опорную прямую, определяемую этой стороной.

Все эти понятия могут быть обобщены на пространство трех измерений. Роль многоугольника в нем будет играть многогранник, вместо опорной прямой придется говорить об опорной плоскости.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Далее мы должны будем дать геометрическое истолкование системе линейных неравенств с двумя переменными. С этой целью обратимся к примерам.

1. Возьмем линейное неравенство $3x_1 + 2x_2 \leqslant 12$. Перепишем его так: $x_1 \leqslant -\frac{2}{3}x_2 + 4$. Если рассматривать равенство $x_1 = -\frac{2}{3}x_2 + 4$, то геометрическим образом его будет прямая AB (рис. 82), угловой коэффициент которой равен $-\frac{2}{3}$ и которая на оси x_1 отсекает отрезок, равный 4. Координаты каждой точки этой прямой удовлетворяют уравнению $x_1 = -\frac{2}{3}x_2 + 4$. Если же мы возьмем строгое неравенство $x_1 < -\frac{2}{3}x_2 + 4$, то любая пара значений x_1 и x_2, удовлетворяющих этому неравенству (и только такая пара), изобразится точкой, лежащей ниже пря-

мой AB. Следовательно, неравенство $x_1 \leqslant -\frac{2}{3}x_2+4$, или, что то же самое, неравенство $3x_1+2x_2 \leqslant 12$, определяет полуплоскость, указанную на рисунке 82. Точки, лежащие на прямой AB, также относятся к этой полуплоскости.

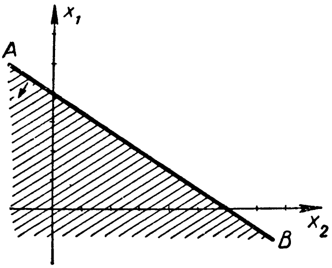


Рис. 82

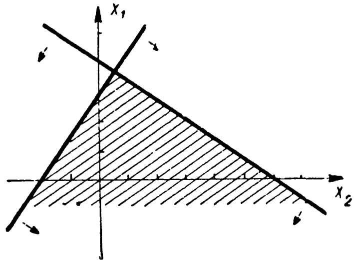


Рис 83

Построение прямой AB проще проводить не по угловому коэффициенту и отрезку, отсекаемому на оси x_1, а по отрезкам, отсекаемым ею на осях x_1 и x_2. Чтобы найти эти отрезки, нужно принять $x_1=0$ и вычислить соответствующее значение x_2, а затем принять $x_2=0$ и найти соответствующее значение x_1. Получатся отрезки, отсекаемые прямой на координатных осях x_2 и x_1. Для прямой AB это будут отрезки *6* и *4*.

Прямая $3x_1+2x_2=12\,(AB)$ делит плоскость на две полуплоскости. Какую именно из этих полуплоскостей нужно взять, можно установить и не разрешая неравенства $3x_1+2x_2<12$ относительно x_1. Достаточно подставить в это неравенство координаты начала (0,0). Если неравенство окажется верным (неверным), то должна быть взята та полуплоскость, которая содержит (не содержит) начало координат.

2. Возьмем систему двух линейных неравенств:

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2 \leqslant 12, \\ 2x_1-3x_2 \leqslant \ 6. \end{cases}$$

Каждое из этих неравенств определяет полуплоскость. Из точек, координаты которых удовлетворяют первому или второму неравенству, мы должны выделить такие, координаты которых удовлетворяют и первому, и второму неравенствам. Это будут общие точки двух полуплоскостей, определяемых данными неравенствами (рис. 83).

3. Если взять систему неравенств:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leqslant 12, \\ 2x_1 - 3x_2 \leqslant 6, \\ -3x_1 - x_2 \leqslant -3, \end{cases}$$

то она определяет область, изображенную на рисунке 84.

4. Присоединим к предшествующей системе еще одно неравенство $2x_1 + x_2 \leqslant -2$. Оно определяет полуплоскость, лежащую ниже прямой MN (рис. 84). Очевидно, что эта полуплоскость не имеет общих точек с многоугольником, определяемым предшествующей системой. Следовательно, получившаяся система не имеет решений. Нет ни одной точки, которая удовлетворяла бы ей. Такие системы называются несовместными.

5. Возьмем еще следующую систему линейных неравенств:

$$\begin{cases} 1)\quad x_2 \geqslant 0, \\ 2)\quad x_1 \geqslant 0, \\ 3)\quad x_1 + x_2 \geqslant 1, \\ 4)\; -x_1 + x_2 \geqslant 1, \\ 5)\quad 2x_1 - x_2 \leqslant 0. \end{cases}$$

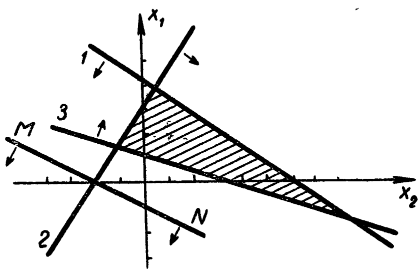


Рис 84

Найдем все точки координатной плоскости x_1Ox_2, удовлетворяющие этой системе. Мы получим множество точек, изображенное на рисунке 85 штриховкой. Оно простирается в бесконечность. Обращаем внимание на то, что неравенства (1) и (3) в формировании области решений данной системы неравенств не участвуют, и поэтому их можно исключить из системы.

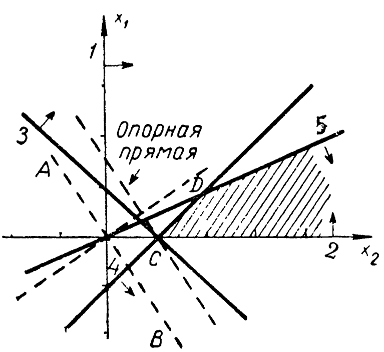


Рис 85

68. Построить область решений системы:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 6, \\ -x_1 + x_2 \leqslant 2, \\ -x_1 - 3x_2 \leqslant 3, \\ x_1 \leqslant \frac{3}{2}. \end{cases}$$

69. Найти область решений системы:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 6, \\ -x_1 + x_2 \leqslant 2, \\ -x_1 - 3x_2 \leqslant 3, \\ 2x_1 \leqslant 3, \\ -3x_1 - 2x_2 \leqslant -12. \end{cases}$$

70. Записать выпуклый многоугольник $ABCD$ (рис. 86) системой линейных неравенств.

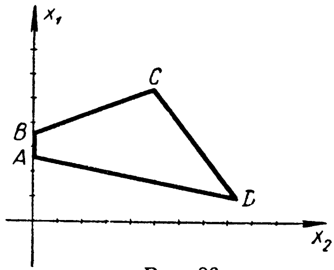


Рис. 86

Примеров достаточно. Рассмотрение их позволяет сделать следующие выводы:

1. ***Система линейных неравенств может иметь решения (быть совместной). Геометрический образ множества решений системы может быть полуплоскостью, ограниченным или неограниченным многоугольником, прямой, отрезком или даже одной точкой.***

2. ***Если система линейных неравенств определяет некоторую область (область ее решений), то эта область представляет собой выпуклый (конечный или бесконечный) многоугольник, так как она лежит по одну сторону от каждой из ограничивающих ее прямых,***

3. ***Система линейных неравенств может и не иметь решений.***

Такова, например, система:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 1, \\ 2x_1 + 2x_2 \geqslant 3. \end{cases}$$

4. ***Если система имеет решения (совместна), то некоторые входящие в нее неравенства могут быть лишними. Отбрасывание их не приводит к изменению множества решений.***

ЭКСТРЕМУМЫ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

Напомним о том, какую задачу нам нужно научиться решать. Дается система линейных неравенств, определяющая некоторое множество точек (область ее решений). Кроме того, задается некоторая линейная функция того же числа независимых переменных (функция цели). Требуется среди точек этого множества найти такие, в которых данная линейная функция достигает экстремума (наибольшего или наименьшего значений — смотря по смыслу задачи).

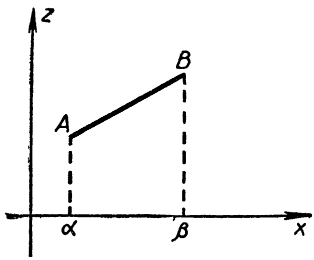


Рис 87

Как же находить наименьшее и наибольшее значения линейной функции?

Вначале возьмем линейную функцию одной переменной $z = ax + b$. Пусть область определения ее (по условиям задачи) — отрезок от α до β (рис. 87). Графиком этой функции является отрезок AB (при $a > 0$). Наименьшее значение она принимает в точке α, а наибольшее — в точке β. Наименьшее значение равно $a\alpha + b$, а наибольшее $a\beta + b$. Если бы выполнялось неравенство $a < 0$, то в этом случае линейная функция в точке α принимала бы наибольшее значение, а в точке β — наименьшее.

В каждом из рассмотренных случаев наименьшее и наибольшее значения линейная функция одного переменного принимает на концах отрезка, служащего *областью определения* ее.

Случай линейной функции от одной переменной очень прост. Если рассматривать линейную функцию двух переменных, то решение аналогичной задачи будет сложней. Правда, идея решения и в этом случае проста. Дело сводится к нахождению направления наибольшего возрастания данной линейной функции. Если это сделано, то далее нужно найти две опорные прямые, перпендикулярные этому направлению, и взять точки, общие для этих прямых и контура многоугольной области, определяемой заданной системой линейных неравенств. Это и будут точки наименьшего и наибольшего значений линейной функции.

Проиллюстрируем сказанное примером. Найдем наибольшее и наименьшее значения линейной функции $z = 2x_1 + 3x_2 + 1$ в области, определяемой системой неравенств:

$$\begin{cases} x_2 \geqslant 0, \\ x_1 \geqslant 0, \\ x_1 + x_2 \geqslant 1, \\ -x_1 + x_2 \geqslant 1, \\ 2x_1 - x_2 \leqslant 0. \end{cases}$$

Эта область изображена на рисунке 85 (стр. 100). Как было показано выше, прямой наибольшего возрастания данной линейной функции является прямая $x_1 = \frac{2}{3} x_2$. Ищем опорные прямые, перпендикулярные этой прямой. Они будут параллельны прямой AB. Одна из опорных прямых пройдет через точку C (1; 0). Эта точка и будет точкой минимума линейной функции, а сам минимум будет равен 4. Второй искомой опорной прямой провести в данном случае нельзя, так как область определения линейной функции простирается в бесконечность. Значит, максимума данная линейная функция не имеет: она неограниченно возрастает.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ЭКСТРЕМУМЫ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

Займемся решением задач, рассмотренных нами выше (стр. 92—95).

1. Первая из этих задач привела нас к необходимости найти такие значения переменных x_1, x_2, y_1 и y_2, которые удовлетворяли бы системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + y_2 = 5, \\ x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 + y_1 = 2, \end{cases}$$

и обращали бы в минимум функцию $z = x_1 + 2x_2 + cy_1 + 3y_2$.

Выразив из уравнений системы x_2, y_1 и y_2 через x_1 и подставив в z, получаем $z = (2 - c)x_1 + 2c + 11$. Найдем область определения получившейся функции. По смыслу задачи должно быть: $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $y_1 \geqslant 0$, $y_2 \geqslant 0$. Из уравнения $x_1 + x_2 = 4$ имеем $x_2 = 4 - x_1$. Но $x_2 \geqslant 0$, поэтому $4 - x_1 \geqslant 0$ и $x_1 \leqslant 4$. Из уравнения $x_1 + y_1 = 2$ имеем

$y_1 = 2 - x_1$. Но $y_1 \geqslant 0$, поэтому $2 - x_1 \geqslant 0$ и $x \leqslant 2$. Сравнивая $x_1 \leqslant 4$ и $x_1 \leqslant 2$ и используя $x_1 \geqslant 0$, находим, что x_1 должно удовлетворять системе неравенств $0 \leqslant x_1 \leqslant 2$.

Остается найти минимум функции $z = (2 - c)x_1 + 2c + 11$ на отрезке $0 \leqslant x_1 \leqslant 2$. Так как $11 + 2c > 0$, ибо $c > 0$, то прямая, являющаяся графиком функции цели, пересекает ось z выше начала координат. Учитывая это, рассмотрим возможные случаи.

1. $2 - c > 0$. Функция цели в этом случае возрастает. Значит, наименьшее значение она принимает при $x_1 = 0$, и это значение равно $2c + 11$. При $x_1 = 0$ имеем: $x_2 = 4$, $y_1 = 2$, $y_2 = 1$, и программа перевозок в этом случае будет такой (табл. 5):

Таблица 5

	$b_1 = 2$	$b_2 = 5$
$a_1 = 4$	1 / $x_1 = 0$	2 / $x_2 = 4$
$a_2 = 3$	$0 < c < 2$ / $y_1 = 2$	3 / $y_2 = 1$

2. $2 - c = 0$. В этом случае функция цели постоянна и равна 15 при любых допустимых значениях x_1, x_2, y_1 и y_2.

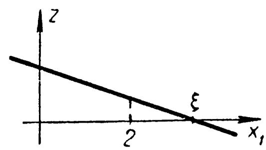


Рис. 88

3. $2 - c < 0$. Функция цели убывает. Наименьшее значение она будет иметь при наибольшем возможном значении x_1.

Найдем это значение x_1.

Прямая $z = (2 - c)x_1 + 2c + 11$ пересекает ось x_1 в точке ξ, удовлетворяющей уравнению $0 = (2 - c)\xi + 2c + 11$.

Из этого уравнения находим:

$$\xi = \frac{2c + 11}{c - 2} = \frac{2(c-2) + 15}{c - 2} = 2 + \frac{15}{c - 2} > 2.$$

Имеем случай, изображенный на рисунке 88. Поэтому наибольшее значение x_1 равно 2, а значит, $x_2 = 2$, $y_1 = 0$, $y_2 = 3$ и программа перевозок будет такой (табл. 6):

2. *Задача об организации снабжения* решается легко. Будем считать (для определенности), что совхозы, поставляющие картофель, занумерованны по возрастанию c_i, то есть $c_1 \leqslant c_2 \leqslant c_3 \leqslant \leqslant c_4$. Тогда из первого совхоза город получит наиболее дешевый картофель, и если $b \leqslant \beta_1$, то весь спрос в картофеле нужно удовлетворить из первого совхоза. В этом случае решение будет таким: $x_1 = b$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Если же $b > \beta_1$, то следует завезти из первого совхоза весь картофель ($x_1 = \beta_1$), а оставшуюся часть $b - \beta_1$ завезти из других совхозов. В этом случае задача свелась к тому, что при спросе города на картофель $b - \beta_1$ нужно завозить его уже из трех совхозов. Опять возможны два случая: $b - \beta_1 \leqslant \beta_2$ или $b - \beta_1 > \beta_2$. Как поступить в каждом из этих случаев, уже ясно. Такими шагами решение этой задачи будет доведено до конца.

Таблица 6

	$b_1 = 2$	$b_2 = 5$
$a_1 = 4$	1 / $x_1 = 2$	2 / $x_2 = 2$
$a_2 = 3$	$c > 2$ / $y_1 = 0$	3 / $y_2 = 3$

3. Решим *задачу об использовании сырья.*

Построим прежде всего область, определяемую системой неравенств:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 19, \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 13, \\ 3x_2 \leqslant 15, \\ 3x_1 \leqslant 18, \\ x_1 \geqslant 0, \\ x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Это будет многоугольник $OBCDEF$ (рис. 89). Построим линию наибольшего возрастания функции $z = 7x_1 + 5x_2$.

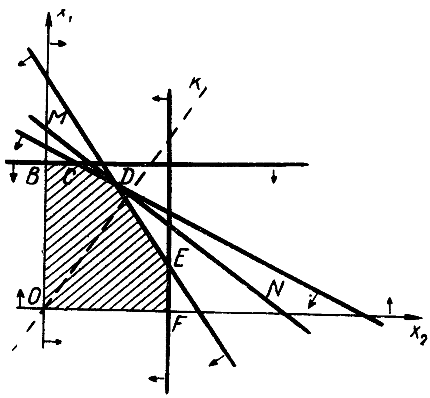


Рис. 89

Это будет линия OK, уравнение которой $x_1 = \frac{7}{5} x_2$. Остается провести опорную прямую, перпендикулярную этой линии и наиболее удаленную от начала координат. Она проходит через вершину D многоугольника условий. Следовательно, $x_1 = 5$, $x_2 = 3$ и $z = 50$.

Решим еще две задачи.

Задача о рационах.

В опытном хозяйстве было установлено, что откорм животных выгоден только тогда, когда каждое животное будет получать в дневном рационе не менее 6 единиц питательного вещества A, не менее 12 единиц вещества B и не менее 4 единиц вещества C. Для кормления животных используются два вида корма K_1 и K_2. 1 кг K_1 стоит 5 коп. и содержит вещества A — 2 единицы, B — 2 единицы, C — 0 единиц. 1 кг K_2 стоит 6 коп. и содержит A — 1 единицу, B — 4 единицы и C — 4 единицы. Какое количество корма каждого вида нужно расходовать ежедневно на одно животное, чтобы затраты на корм были минимальными?

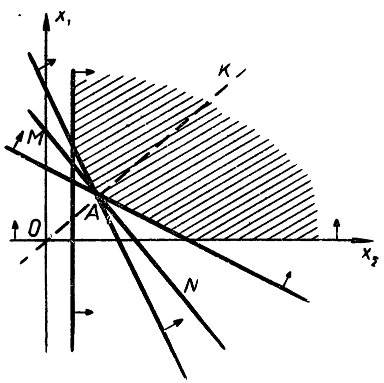


Рис. 90

Если x_1 (*кг*) — расход K_1, а x_2 (*кг*) — расход K_2, то стоимость рациона на одно животное — $z = 0{,}05x_1 + 0{,}06x_2$ (руб.). Ограничивающие условия в данном случае выражаются системой неравенств:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geqslant 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \geqslant 12, \\ 4x_2 \geqslant 4, \\ x_1 \geqslant 0, \\ x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Эта система неравенств определяет бесконечную многоугольную область (рис. 90). Прямая наибольшего возрастания OK имеет уравнение $x_1 = \frac{5}{6}x_2$. Остается провести опорную прямую, перпендикулярную этой линии и наиболее близкую к 0. Это прямая MN. Она проходит через точку A контура. Следовательно, $x_1 = 2$ *кг*, $x_2 = 2$ *кг* и $z = 0{,}22$ руб.

Задача о пашне.

Колхоз намерен выделить под кормовые культуры 100 га пашни. Эту пашню предположено занять кукурузой и свеклой, причем свеклой решено занять не менее 40 га. Требуется установить, как должна быть распределена площадь пашни по культурам, чтобы получилось наибольшее число кормовых единиц. При этом должно быть учтено следующее: 1 ц кукурузного силоса содержит 0,2 ц кормовых единиц, 1 ц свеклы — 0,26 ц кормовых единиц, на возделывание 1 га кукурузного поля необходимо 38 человеко-часов труда механизаторов и 15 человеко-часов ручного труда, а 1 га, занятого свеклой, соответственно — 43 и 185, ожидаемый урожай кукурузы 500 ц с 1 га, и свеклы — 200 ц с 1 га, и, наконец, всего на возделывание кормовых культур колхоз может выделить 4000 человеко-часов труда механизаторов и 15 000 человеко-часов ручного труда.

Функция цели здесь такова: $z = 500 \cdot 0{,}2x_1 + 200 \times$ $\times\ 0{,}26x_2$, или $z = 100x_1 +$ $+\ 52x_2$, где x_1 — число *га* пашни, отведенной под кукурузу, и x_2 — под свеклу.

Ограничивающие условия задаются системой неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 100, \\ 38x_1 + 43x_2 \leqslant 4000, \\ 15x_1 + 185x_2 \leqslant 15\,000, \\ x_2 \geqslant 40. \end{cases}$$

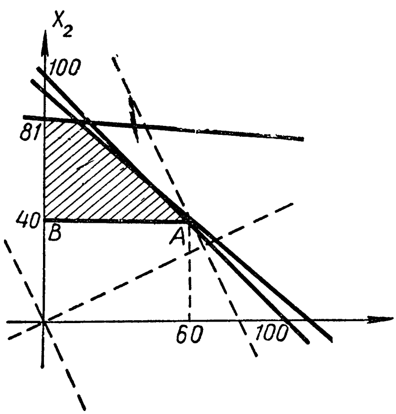


Рис 91

На рисунке 91 изображена определяемая этими неравенствами выпуклая многоугольная область.

Прямой наибольшего возрастания служит $x_2 = \frac{52}{100} x_1$, а опорные прямые проходят через точки A и B. Первая из этих точек дает оптимальный план: $x_1 = 60$ *га*, $x_2 =$ $= 40$ *га*. При реализации этого плана будет получено 8080 кормовых единиц.

Решите самостоятельно задачу на организацию производства.

Таблица 7

	Инструменты	Сырье 1	Сырье 2	Рабочее время
Расход на 1 деталь по участку *A*	2	5		3
Расход на 1 деталь по участку *B*	3	4	0,5	2
Всего имеется . . .	200	400	20	300

71. Деталь некоторой машины изготовляют два цеховых участка *A* и *B*. Производственные возможности этих участков характеризуются следующими данными (табл. 7). Разработать наиболее оптимальный план изготовления этой детали участками *A* и *B*.

Мы рассмотрели несколько простых задач линейного программирования. Простота их позволила нам воспользоваться для нахождения решений простыми приемами. Ну, а если бы задачи были сложней? Тогда усложнились бы и решения их.

В прикладных задачах число уравнений и неравенств бывает всегда большим. Это сильно осложняет вычисления. Поэтому приходится разрабатывать специальные методы решения таких задач. Этим и занимается новая область математики — линейное программирование[1].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Человеку постоянно приходится решать разнообразные задачи на управление различными системами. Приходится организовывать, настраивать и перестраивать производственные процессы, устанавливать и поддерживать определенную технологию производства, управлять сложными машинами. Много подобных задач выдвигают экономика, различные науки и повседневная жизнь. Каждый

[1] Читателю, заинтересовавшемуся линейным программированием, можно рекомендовать книги Л. С Барсова «Что такое линейное программирование» (Физматгиз, 1959) и С. Гасса «Линейное программирование» (Физматгиз, 1961).

раз, когда такая задача встает перед человеком, он старается из всех возможных решений ее выбрать наилучшее, которое больше всего удовлетворяло бы выдвигаемым требованиям. Короче говоря, человека интересуют оптимальные решения задач на управление различными системами. Человека больше всего интересуют оптимальные процессы.

Л. С Понтрягин

Системы, которыми приходится управлять человеку, оказываются почти всегда сложными. Для математической характеристики их приходится пользоваться большим числом переменных. Между тем отыскание экстремумов функции пяти и более переменных на вычислительной машине с помощью классических методов практически оказывается уже невозможным. Как же быть? Конечно,нужно искать новые методы решения задач на оптимальное управление, и этим заняты сейчас многие математики.

Выдающийся вклад в теорию оптимальных процессов внесли советские математики—академик Л. С. Понтрягин, его ученики и сотрудники. В 1961 году вышла в свет книга Л. С. Понтрягина, В. Г. Болтянского, Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко «Математическая теория оптимальных процессов». В ней изложено решение общей задачи оптимального управления, открытое и разработанное авторами ее. По существу, академик Л. С. Понтрягин и его сотрудники создали новое исчисление, приспособленное к разрешению вопросов оптимального управления.

Большой вклад в теорию управления сложными системами внесли также советские математики И. М. Гельфанд и М. Л. Цетлин.

Поиски новых методов решения задач на оптимальное управление продолжаются и развертываются все более широким фронтом.

Вот и кончились наши беседы о математических задачах на экстремумы. Но ведь за последней страницей прочитанной книги следует первая страница новой книги. Пусть же эта новая книга в твоих руках, юный читатель, будет опять математической! И пусть каждая новая книга ведет тебя все дальше и дальше в прекрасный мир математики.

РАЗЛИЧНЫЕ ЗАДАЧИ НА ОПТИМУМЫ [1]

72. В некоторой стране есть два соседних поселка A и B. Все жители поселка A говорят только правду, а жители B только лгут. Путешественник попал в один из этих поселков, но в какой именно — он не знает. Чтобы узнать это, он может поговорить с первым встретившимся ему человеком, который может оказаться как жителем A, так и B. Разговор может состоять только из вопросов путешественника и ответов на них его собеседника. Вопросы могут задаваться только такие, на которые собеседник ответит лишь «да» или «нет». Какое наименьшее число вопросов необходимо для того, чтобы путешественник мог узнать, в каком поселке он находится и в каком поселке живет встретившийся ему человек?

73. Из 100 различных предметов задуман один. Какой именно предмет задуман, можно узнать, задавая задумавшему его вопросы, на которые тот должен правильно отвечать «да» или «нет». Какое наименьшее число вопросов и какие именно вопросы нужно задать, чтобы угадать задуманный предмет?

74. Имеются n одинаковых по виду монет, из которых одна фальшивая (более легкая). Как с помощью наименьшего числа взвешиваний монет на чашечных весах без гирь выяснить, какая монета фальшивая?

75. Требуется поджарить три ломтика хлеба, каждый с двух сторон. На сковородке же умещаются только два ломтика. Придется поджаривание повторять. Для определенности будем считать, что на укладывание ломтика на сковородку, на перевертывание его и на снятие со сковородки уходит по 3 секунды и каждое

---

[1] Ответов и указаний к этим задачам мы не даем. Делаем это для того, чтобы предоставить читателю возможность проявить больше упорства, настойчивости и самостоятельности.

из этих действий может выполняться одновременно лишь с одним ломтиком. Будем считать также, что поджаривание ломтика с одной стороны продолжается 30 секунд на намазывание ломтика с одной стороны уходит 12 секунд и каждый ломтик намазывается маслом только с одной поджаренной стороны Как провести поджаривание ломтиков хлеба в кратчайший срок? (Время на разогревание сковородки можно не учитывать.)

76. Исследователь намерен совершить переход через бесплодную и безводную пустыню. Переход этот должен продолжаться шесть дней. Сам исследователь и сопровождающие его носильщики могут нести лишь четырехдневный запас пищи и воды для одного человека Как следует провести этот переход, чтобы расходы на него были наименьшими?

77. Два города A и B соединены шоссейной дорогой, длина которой l *км*. Нужно возле шоссе выбрать пункт для строительства нефтебазы, снабжающей нефтепродуктами эти города. Потребность города A в нефтепродуктах — a *т*, города B — b *т*. Стоимость перевозки 1 *т* нефтепродуктов на 1 *км* — c рублей. Нефтебазу нужно построить так, чтобы стоимость перевозки нефтепродуктов в города A и B была минимальной. Где следует строить нефтебазу?

78. Для того чтобы поддерживать на определенном уровне воду в котловане, в который за сутки прибывает n *м*^{3} воды, поставлены два насоса производительностью $a_1 \frac{м^3}{ч}$ и $a_2 \frac{м^3}{ч}$, и стоимость одного часа работы их соответственно r_1 рублей и r_2 рублей. Определить, сколько времени должен работать каждый насос, чтобы затраты были наименьшими $\left(\frac{n}{a_1 + a_2} \leqslant 24\right)$.

79. Одному буксиру нужно перевезти за наименьшее время два понтона вниз по реке на l *км*. Было решено, что один понтон будет отправлен по течению реки самостоятельно, а другой будет некоторое время транспортироваться буксиром, после чего буксир оставит его, вернется за первым и отбуксирует его до конечного пункта. Сколько километров должен транспортироваться второй понтон, чтобы оба понтона пришли к конечному пункту одновременно, и сколько потребуется времени на всю перевозку, если скорость буксира v, а скорость течения реки u?

80. Скорость течения реки, вытекающей из озера, равна c. Моторная лодка, находящаяся на расстоянии l *км* от озера, обладает двумя скоростями v_1 и v_2, с расходом горючего p_1 и p_2 в час соответственно ($v_1 > v_2$ и $p_1 > p_2$). Сколько времени должна идти лодка на большей скорости, чтобы достичь озера за наименьшее время, если запас горючего P *кг*?

81. Найти значения x_1 и x_2, обращающие в максимум линейную функцию $z = x_1 + 5x_2$ при ограничивающих условиях:

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \leqslant 30, \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 12, \\ x_1 \geqslant 0, \\ x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

82. Для изготовления столов и шкафов употребляются два вида древесины. Расход древесины (в *куб. м*) таков (табл. 8):

Таблица 8

Изделие	Древесина 1-го вида	Древесина 2-го вида
Стол	0,15	0,2
Шкаф	0,2	0,1

Доход мастерской от производства 1 стола — 12 рублей, а 1 шкафа — 15 рублей. Сколько столов и сколько шкафов должна изготовить мастерская, чтобы обеспечить наибольший доход, если запасы древесины таковы: 60 $м^3$ — 1-го вида и 40 $м^3$ — 2-го вида?

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

3. Поперечное сечение должно быть квадратом со стороной $\frac{\sqrt{2}}{2} D$.

4. Прямоугольный участок должен быть квадратом со стороной $\sqrt{S}$, где S — данная площадь.

5. $x = \frac{l}{4}$.

6. Высота прямоугольника должна быть равна $\frac{1}{2} h_a$.

7. Высота должна быть равна $\frac{l\sqrt{3}}{3}$.

8. Через 3 *ч* 36 *мин* после начала движения.

9. Радиус основания и высота должны быть равны $\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$.

10. Отношение диаметра основания банки к ее высоте должно быть равно $\frac{\pi}{4}$.

11. Ширина канала должна быть в два раза больше его высоты.

12. $x = \frac{2}{3} h$.

13. $x = \frac{a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}$.

14. $x = \frac{2}{3} h$.

15. $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$.

16. $\approx 33{,}3\%$.

17. Элементарное решение этой задачи может быть таким: нужно исследовать на экстремум функцию $S = a^2 \; (1 + \cos x) \sin x$; или $S = 4a^2 \cos^3 \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}$. Но $\cos^3 \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = \sqrt{\cos^6 \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{2}} = \sqrt{27 \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{3} \cdot \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{3} \; \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{3} \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}$. Исследуемая функ-

ция будет иметь экстремум, когда будет иметь экстремум произведение $\frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{3} \cdot \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{3} \cdot \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{3} \sin^2 \frac{x}{2}$. Но сумма множителей этого произведения равна 1. Поэтому исследуемая функция будет иметь максимум, когда эти множители будут равны. Должно быть: $\frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{3} = \sin^2 \frac{x}{2}$ или $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{3}$. Отсюда $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{x}{2} = 30°$ и $x = 60°$.

18. Выше (стр. 13) было установлено, что $s = -\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) x^2 + 2px$. Отсюда $2p = \frac{s}{x} + \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) x$. Но $\frac{s}{x}\left[\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) x\right] = s\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)$ — постоянное число. Поэтому $2p$ будет иметь наименьшее значение при $\frac{s}{x} = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) x$, то есть при $x = \sqrt{\frac{2s}{\pi + 4}}$. В этом случае будем иметь $p = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi + 4}$ и $h = \sqrt{\frac{2s}{\pi + 4}}$, то есть $x = h$.

19. Нужно исследовать функцию $y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \operatorname{tg}\alpha \; x$. Абсцисса вершины этой параболы равна $x_0 = \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha$. Дальность полета равна $x_1 = 2x_0 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$, и она будет наибольшей при условии $\sin 2\alpha = 1$, то есть при $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, или $\alpha = \frac{\pi}{4}$. При этом значении α будем иметь $x_1 = \frac{v_0^2}{g}$.

20. Мощность во внешней цепи будет равна RI^2, где I — сила тока. Но $I = \frac{E}{R + r}$, поэтому мощность равна $\frac{RE^2}{(R + r)^2}$, или $\frac{E^2}{\frac{(R + r)^2}{R}}$. Наибольшей мощность будет, если дробь $\frac{(R + r)^2}{R}$ будет наименьшей. Но эту дробь можно записать в виде $2r + R + \frac{r^2}{R}$. Так как r — постоянно, то рассматриваемая дробь будет иметь наименьшее

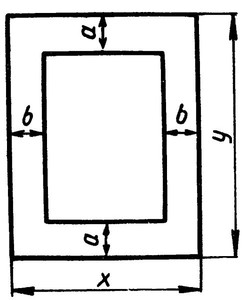


Рис. 92

значение одновременно с суммой $R+\frac{r^2}{R}$. Но произведение слагаемых этой суммы постоянно $\left(R\cdot\frac{r^2}{R}=r^2\right)$. Следовательно, эта сумма будет наименьшей при $R=\frac{r^2}{R}$, то есть при $R=r$. Значит, мощность будет наибольшей при $R=r$.

21. Площадь, занятая текстом (рис. 92), равна $Q=(x-2b)(y-2a)$. Но $y=\frac{S}{x}$, и поэтому $Q=(x-2b)\left(\frac{S}{x}-2a\right)$, или $Q=S+4ab-$ $-\left(\frac{2bS}{x}+2ax\right)$. Площадь Q, занятая текстом, будет наибольшей, если сумма $\frac{2bS}{x}+2ax$ будет наименьшей. Так как произведение $\frac{2bS}{x}\cdot 2ax=$ $=4abS$ постоянно, то эта сумма будет наименьшей при условии $\frac{2bS}{x}=2ax$, или $2by=2ax$, а значит $\frac{x}{y}=\frac{b}{a}$.

22. Если расстояние между источниками света — a, сила света каждого из них — I, то освещенность точки, находящейся на расстоянии x от одного из них и $a-x$ — другого, равна $E=\frac{I}{x^2}+$ $+\frac{I}{(a-x)^2}$, или $E=\frac{I(2x^2-2ax+a^2)}{(-x^2+ax)^2}$. Числитель этой дроби при $x=\frac{a}{2}$ имеет наименьшее значение, а знаменатель (при том же значении x) — наибольшее. Следовательно, при $x=\frac{a}{2}$ освещенность будет наименьшей.

23. Пусть $OA=x$. Освещенность в точке B равна $E=\frac{I}{OB^2}\cos\alpha$, где I — сила света светильника. Так как $\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$, то $E=$ $=\frac{Ix}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $E'=\frac{I(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}-3Ix^2(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2+x^2)^3}$. Получаем уравнение $\sqrt{(a^2+x^2)^3}-3x^2\sqrt{a^2+x^2}=0$, или $-2x^2+a^2=0$. Решив его, найдем: $x=\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}a\approx 0{,}707\ a$.

24. Эта задача легко решается построением. Через точки A и B нужно провести окружность которая касалась-бы прямой CD. Точка касания и будет искомой

25. Следует вывести зависимость $\operatorname{tg} x=\frac{ah}{y^2+hy-a^2}$ и рассмотреть ее. Наилучшая видимость будет при $y=-\frac{h}{2}$, то есть когда

нижний край экрана будет находиться ниже уровня глаз зрителя на $\frac{h}{2}$.

26. Для провоза леса по пути ACB необходимо время $y = \frac{a-x}{v_2} + \frac{\sqrt{x^2+l^2}}{v_1}$ (без учета времени на погрузочно-разгрузочные работы). Это уравнение можно разрешить относительно x. Получим: $x = \frac{v_1^2(yv_2-a) \pm v_2\sqrt{v_1^2(v_2y-a)^2 - l^2(v_2^2-v_1^2)}}{v_2^2-v_1^2}$. Так как для x допустимы лишь действительные значения, то должно быть: $v_1^2(v_2y-a)^2 - l^2(v_2^2-v_1^2) \geqslant 0$. Решая это неравенство относительно y, получаем $y \geqslant \frac{av_1 + l\sqrt{v_2^2-v_1^2}}{v_1v_2}$. Наименьшее значение y поэтому равно $\frac{av_1 + l\sqrt{v_2^2-v_1^2}}{v_1v_2}$. Подставив это выражение y' в выражение x, получим $x = \frac{v_1 l}{\sqrt{v_2^2-v_1^2}}$. Эта задача значительно легче решается с помощью производной. Действительно: $y' = -\frac{1}{v_2} + \frac{x}{v_1\sqrt{x_2+l^2}}$. Получаем уравнение $-\frac{1}{v_2} + \frac{x}{v_1\sqrt{x^2+l^2}} = 0$, решив которое, найдем $x = \frac{lv_1}{\sqrt{v_2^2-v_1^2}}$.

27. За независимое переменное можно принять расстояние CD. Представляет интерес исследовать решение.

28. Необходимо найти минимум функции $F = \frac{0{,}49}{\cos\alpha + 0{,}4\sin\alpha}$; $\alpha \cong 22°$.

29. Можно найти функцию от v, выражающую затрату на 1 *км* пути судна, и исследовать ее на экстремум; $v = \sqrt[3]{\frac{a}{2b}}$.

30. За независимое переменное удобно принять угол наклона боковых стенок по отношению к горизонту. Этот угол должен быть равен 60°.

31. За независимое переменное удобно принять угол между бревном и стенкой большого канала. Тогда длина бревна, упирающегося концами в стенки, будет равна $l = \frac{2}{\cos\varphi} + \frac{4}{\sin\varphi}$. Должно быть $l < 8{,}3$ (*м*).

32. Нужно использовать зависимость между путем и временем при равноускоренном движении; $\alpha = 45°$.

33. За независимое переменное удобно принять угол φ. Тогда емкость конуса, в который свернут фильтр, выразится так: $v = \frac{R^3\varphi^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}$. Наибольшее значение v будет при $\varphi \cong 296°$.

34. Вершиной A искомого прямоугольника должна служить точка $\left(\frac{\sqrt{H}}{\sqrt{3}}, \frac{H}{3}\right)$.

35. За независимое переменное можно принять угол между осью (высотой) и образующей конуса; $\alpha = 36°16'$.

36. Радиус основания цилиндра должен быть равен $\frac{2}{3}$ радиуса основания конуса.

37. Высота цилиндра должна равняться $\sqrt{2}\,R$ (R — радиус шара).

38. Площадь искомого прямоугольника равна половине площади данного треугольника.

39. Следует площадь треугольника записать по формуле Герона и воспользоваться теоремой об экстремуме произведения при условии, что сумма всех множителей его постоянна.

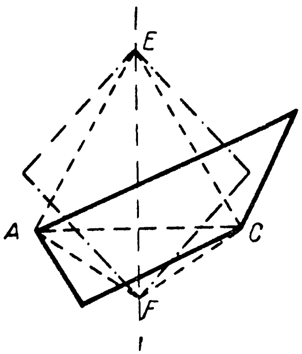


Рис. 93

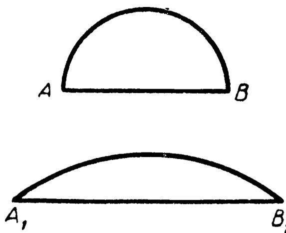


Рис. 94

40. Произвольный четырехугольник с диагональю AC вначале следует заменить двумя равнобедренными треугольниками AEC и AFC с общим основанием AC и лежащими по разные стороны от него (рис. 93). Периметры этих треугольников должны быть соответственно равны периметрам тех двух треугольников, из которых состоит исходный четырехугольник. Далее, треугольники AEF и CEF, симметричные друг другу относительно EF, нужно заменить равнобедренными треугольниками с тем же основанием EF и такими же периметрами. Получим ромб. Останется так раздвинуть стороны этого ромба (изменяя EF), чтобы получился квадрат. Периметр этого квадрата будет равен периметру исходного четырехугольника, а площадь квадрата будет больше

41. Для сравнения площадей двух фигур — полукруга и отличной от полукруга (рис 94) — нужно дополнить их симметричными им фигурами относительно AB и A_1B_1 и воспользоваться главной изопериметрической задачей

42. Доказательство может быть аналогичным предшествующему (задача 41).

43. Решение этой задачи, как и двух предшествующих, сводится к применению главной изопериметрической задачи.

Для этого надо сравнить два многоугольника с данными сторонами: вписанный в окружность и не являющийся вписанным. Оба эти многоугольника следует дополнить соответственно равными сегментами определенной величины так, чтобы первый многоугольник превратился в круг, а второй — в фигуру, отличную от круга.

44. 45. Прием решения взаимных задач может быть таким же, как и в случае решения задачи, взаимной по отношению к главной изопериметрической задаче.

46. Длина кратчайшего пути равна 6,4 *дм.*

52. Один из учеников школы юных математиков, где мы рассказывали о кратчайших сетях предложил следующий прием: сначала нужно построить полную сеть, то есть соединить отрезком прямой

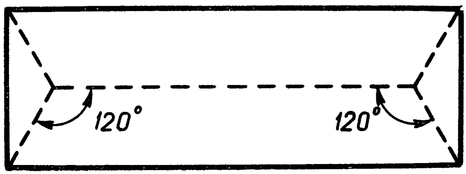


Рис. 95

любую вершину сети с любой другой, а затем надо выбросить наиболее длинное звено, дальше — наиболее длинное из оставшихся и т. д. Эти звенья надо выбрасывать так, чтобы каждый раз оставалась связная сеть. Процесс выбрасывания должен продолжаться до тех пор, пока это окажется возможным.

57. К требуемому доказательству вплотную подводят предшествующие рассуждения.

58. Можно обратиться к книге С. И. Зетель «Задачи на максимум и минимум» (Гостехиздат, 1948).

59. Отрезок P_1P_2 может быть параллелен стороне A_2A_3.

60. Смотреть рисунок 95.

61. Такой точкой служит точка пересечения диагоналей

62. Можно воспользоваться способом приведения к противоречию («от противного»).

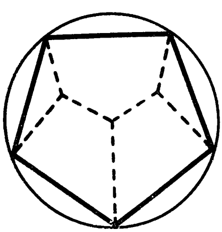


Рис. 96

63. Пусть минимальная сеть не является односвязной. Тогда найдется такой отрезок сети, который можно отбросить. Получится связная сеть, длина которой окажется меньше длины минимальной сети, что невозможно.

64 Можно воспользоваться способом приведения к противоречию (со свойством связности).

65. Сеть для пятиугольника изображена на рисунке 96. Сетью для правильного шестиугольника является сам этот шестиугольник

67. Центроид системы n точек нужно соединить отрезком с добавленной точкой и этот отрезок разделить в отношении $n : 1$, считая от добавленной точки

69. Система решений не имеет.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Федор Федорович Нагибин

ЭКСТРЕМУМЫ

Редактор *Э. К. Викулина*
Художник *И. А. Тарасов*
Художественный редактор *В. С. Эрденко*
Технический редактор *Е. В. Иванова*
Корректор *М. В. Голубева*

Сдано в набор 19/III 1966 г. Подписано к печати 1/X 1966 г. 84 × 108$^1/_{32}$. Печ. л. 3,75(6,30). Уч.-изд. л. 5,70. Тираж 110 тыс. экз. (Тем. пл. 1966 г. № 422/642). А 13978.

Издательство «Просвещение» Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Типография издательства «Звязда», Минск, Ленинский проспект, 79. Заказ № 191.

Цена 15 коп